Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 38, núm. 1, 2023. Pàg. 67–105. DOI: 10.2436/20.2002.01.109

De la teoria de grafs clàssica a l'anàlisi de les grans xarxes

Juanjo Rué

La formulació d'un problema és més important que la seva solució.

Albert Einstein

Resum: Actualment la teoria de grafs té un paper fonamental tant en les matemàtiques pures com en les seves aplicacions en moltes branques del coneixement. En aquest article recorrerem l'evolució de l'àrea de recerca partint del seu naixement i passant per les grans descobertes de la disciplina, especialment les relatives a la interacció amb la noció d'atzar. Finalment, el nostre recorregut finalitzarà discutint algunes de les tendències actuals de la teoria, que cerquen encabir la noció de discret (inherent a la teoria de grafs) dins del reialme de les matemàtiques contínues amb l'objectiu d'afrontar, entre d'altres grans reptes, l'estudi sistemàtic de les grans xarxes existents al món real.

Paraules clau: teoria de grafs, mètode probabilístic, límits de grafs, grafs aleatoris, pseudoaleatorietat.

Classificació MSC2020: 05C10, 05D40, 05C35.

1 Introducció

En els darrers anys s'ha fet més que evident que un gran nombre d'estructures i fenòmens ben rellevants del món real es poden descriure mitjançant *grafs* (també anomenats *xarxes*) o, en llenguatge planer, mitjançant un conjunt (discret i finit) d'elements separables, junt amb interaccions entre parelles dels elements del conjunt. Els exemples següents poden ser paradigmàtics i prou representatius del tipus de grafs que ens trobem en el món real:

La xarxa Internet: El graf per antonomàsia (pel fet de ser el més conegut i possiblement el més estudiat) és l'associat a la xarxa Internet. No només aquesta, sinó d'altres que se'n deriven de manera natural: la xarxa d'hipervincles (per exemple, de pàgines web), certes bases de dades distribuïdes, etc. La mida de la xarxa Internet no és un paràmetre menor i està en constant evolució: actualment el nombre de pàgines web s'estima que supera el bilió, de les quals aproximadament un 17 % són actives, i aproximadament 5 bilions de dispositius hi tenen accés. La xarxa Internet, a més de ser una xarxa ben gran, canvia constantment.

El cervell: A més de les xarxes que apareixen en l'estudi de l'ecologia, la biologia estudia molts cops xarxes d'interacció entre, per exemple, proteïnes. Però potser l'exemple més paradigmàtic en aquest àmbit és el cervell humà, o més ben dit, el graf que defineixen les neurones del cervell i les connexions entre elles: s'estima que el cervell conté de l'ordre de 100.000 milions de neurones (10^{11}) i de l'ordre de 100 trilions de connexions, les anomenades *sinapsis*. De nou, aquesta xarxa (a més de ser molt gran) evoluciona amb el temps segons les tasques de les diverses neurones, de la seva mort, etc.

Interaccions socials: Els grafs d'interacció social (tant en el món virtual com les que apareixen en sociologia, història, economia i epidemiologia, entre d'altres) són bons exemples de grafs amb molts individus. Sense anar més lluny, el graf en què els agents que interaccionen són els éssers humans vius (i les arestes són precisament la coneixença entre dues persones) dona lloc a un graf que s'apropa cada cop més als 8.000 milions de nodes (de fet, estimacions de novembre de 2022 ja consideren que s'ha superat aquesta barrera). En particular, aquest graf evoluciona en cada moment per les dinàmiques inherents a la interacció social (per exemple, pels naixements, defuncions, etc.). Fins i tot es podria considerar una iteració més d'aquest graf: la xarxa social de tots els éssers humans vius o morts. Aquí el nombre d'agents seria, doncs, molt més elevat.

Microprocessadors: Des de la creació del primer transistor després de la Segona Guerra Mundial als laboratoris Bell de l'AT&T (a Nova Jersey, Estats Units), la llei de Moore (formulada l'any 1965 [27]) va vaticinar que aproximadament cada dos anys el nombre de transistors en un microprocessador es duplicaria. La llei s'ha anat complint de manera prou ajustada fins avui dia. Aquest creixement exponencial durant els darrers setanta anys ha fet que actualment existeixin microprocessadors comercials (per exemple, de les empreses Intel o AMD) en què la integració supera els 50.000 milions de transistors per microprocessador. Les connexions entre els transistors es defineixen dinàmicament segons les tasques que el microprocessador estigui realitzant. Tenint en consideració que el transistor és l'escala binària bàsica i que els ordinadors actuals treballen a una amb un nivell de paral·lelització descomunal (si els comparem, sense anar més lluny, amb els ordinadors de fa deu anys), és clar que el nombre d'interaccions per segon entre transistors serà de l'ordre de trilions.

Cristalls: La física estadística (tant des del punt de vista teòric com des del vessant més aplicat) estudia les interaccions entre un gran nombre de partícules discretes, molts cops modelant estructures físiques de tipus continu. Sense anar més lluny, un cristall es pot interpretar com una xarxa els nodes de la qual són els àtoms i les interaccions representen la química intrínseca dels enllaços. En aquest sentit, un cristall perfecte (en què els àtoms es col·loquen de manera completament simètrica) té poc interès, i amb l'aparició d'impureses obtenim materials amb propietats interessants. Tenint en ment que estem treballant a escala atòmica i que molts cops les aplicacions industrials necessiten mides macroscòpiques, aleshores és evident que les mides de les xarxes es poden arribar a considerar en termes de múltiples del nombre d'Avogadro (6.022×10^{23}).

Tots aquests exemples tenen un gran interès per a la societat i tenen també diversos aspectes en comú. Primer: són grafs descomunals dels quals mai no podrem tenir el coneixement absolut de tots dels seus vèrtexs i de les corresponents interaccions (més sorprenent encara quan constatem que algunes d'aquestes xarxes les ha creat l'ésser humà!). I segon, no són grafs estàtics: evolucionen amb el pas del temps. Apareix, doncs, un problema natural: com podem analitzar aquests grafs tan grans des d'un punt de vista pràctic? El primer pensament per a resoldre aquesta pregunta és l'exploració directa mitjançant tècniques computacionals (per exemple, fent cerques exhaustives). Però hom es pot imaginar que la complexitat d'aquestes xarxes és tan elevada que fins i tot amb ordinadors potents no podrem donar respostes satisfàctories a preguntes tan bàsiques com si el graf és connex o si té triangles.

En els darrers seixanta anys la teoria de grafs ha evolucionat de manera dramàtica (de la mà també d'una branca del coneixement amb una evolució no menys espectacular: la informàtica teòrica) i avui en dia podem dir que tenim una sèrie de tècniques (en què la probabilitat té un paper fonamental) que són útils per a resoldre, en part, aquestes qüestions. Com a culminació d'un camí que va començar fa gairebé tres-cents anys, avui dia la teoria de grafs ja és una branca madura de recerca de les matemàtiques i amb interaccions molt profundes amb altres àrees de la ciència. El nostre objectiu en aquest assaig és fer un recorregut des de la seva infància fins a la madura branca del coneixement tal com l'entenem avui.

Per finalitzar aquesta introducció voldríem remarcar que per manca d'espai és impossible poder cobrir un recull històric exhaustiu de la totalitat d'aquesta disciplina, així com de les seves interaccions amb altres branques (especialment aquí s'està pensant en la informàtica teòrica i en l'optimització discreta). Ens centrarem, en aquest assaig, en un relat que ens portarà dels primers problemes de l'àrea (ja al segle XVII) al gran programa iniciat fa poc més de vint anys pel guanyador del premi Abel Lázsló Lovász i coautors (mireu, per exemple, el llibre clau en aquesta teoria [24]) i que té com a objectiu la comprensió profunda dels grafs en termes d'objectes continus.

2 L'origen: tot passejant per Königsberg

Si una branca de les matemàtiques té un origen ben definit i unívocament determinat, aquesta és la teoria de grafs. I s'inicia, com molts cops passa, amb una pregunta innocent, com moltes de les que veurem més endavant (no per innocent menys interessant, però). En aquest cas, el problema pot ubicar-se geogràficament en l'actual Kaliningrad (anteriorment anomenada Königsberg), ciutat que des de l'any 1946 pertany a Rússia arran de la Conferència de Potsdam. La ciutat de Kaliningrad creix al llarg del riu Pregolia i defineix al seu centre l'illa de Kneiphof, on es trobava la catedral de la ciutat (vegeu la figura 1 amb una antiga imatge de l'illa des de l'altre costat de la ribera).

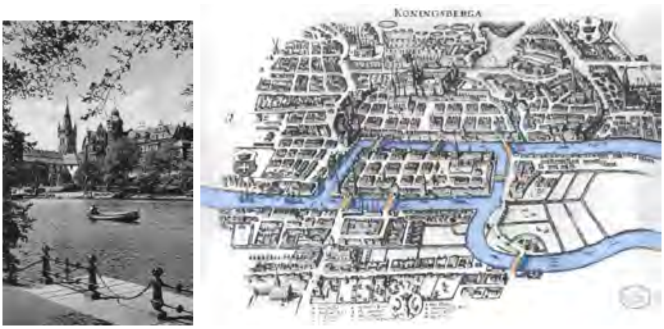

FIGURA 1: Fotografia de l'any 1912 de la catedral de Königsberg i mapa antic de la ciutat.

La qüestió (més aviat, el divertiment) que es proposaven els ciutadans de la ciutat de Königsberg durant el segle XVIII era la següent: la ciutat estava comunicada a través de set ponts, tal com es mostra a la figura 1. La pregunta és si era possible fer una passejada passant per tots els ponts de la ciutat (en un sentit o en un altre) i sense repetir-ne cap. La solució del problema dels ponts de Königsberg va ser proposada pel gran Leonhard Euler i amb aquesta resposta inicià la teoria de grafs. En el seu treball *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, de l'any 1736, el gegant matemàtic formula i resol el problema en termes abstractes, tot iniciant així una nova branca de les matemàtiques (de fet, no només de la teoria de grafs, sinó que es podria pensar que també de la topologia). Vegem-ne el plantejament i la solució i, el més important, la generalització.

La primera observació rellevant és que el realment important en el problema és *quines regions de la ciutat de Königsberg tenim* i *quines illes estan connectades per ponts*. En llenguatge modern diríem que les quatre regions de la ciutat són els *vèrtexs* i que els ponts que les uneixen són les *arestes*. En general, un graf G, doncs, vindrà definit per una parella (V, A), en què V és el conjunt de vèrtexs i A són conjunts de parelles de vèrtexs (parella que en aquest model prenem no ordenada). Si aquestes es consideren amb repetició (dit d'una altra manera, diverses arestes poden unir una mateixa parella de vèrtexs), aleshores direm que el graf té arestes *múltiples* i que estem treballant amb un *multigraf* (en els multigrafs també podem acceptar arestes amb només un sol vèrtex extrem: són les arestes que anomenem *llaços*). Altrament, si el graf no té ni arestes múltiples ni llaços, direm que el graf és *simple*. En el cas del problema que portem entre mans, el graf concret que obtenim (que, en particular, té arestes múltiples) és el que es mostra en la figura 2.

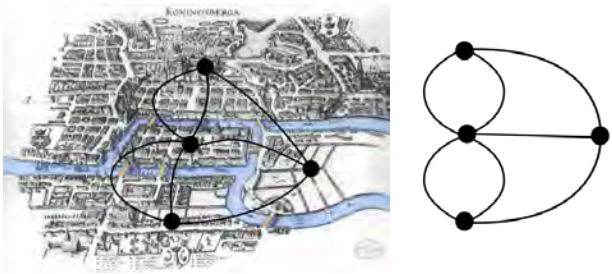

FIGURA 2: Diagrama de ponts simplificat i multigraf associat.

El nostre multigraf té, doncs, quatre vèrtexs i set arestes, dues parelles de les quals són múltiples. El que volem estudiar ara és l'existència d'una seqüència de vèrtexs (possiblement repetits) en el graf G, diem-ne $v_1, v_2, \ldots, v_r$, de tal manera que els vèrtexs consecutius en la seqüència estan units per arestes, que totes les arestes $\{v_i, v_{i+1}\}$ per $i = 1, 2, \ldots, r-1$ són diferents i que totes les arestes del graf han aparegut en el passeig. Com a comentari, el primer vèrtex (v_1) i l'últim (v_r) poden ser iguals o diferents. Direm que un tal recorregut del graf s'anomenarà *camí eulerià*. Si, a més, el vèrtex inicial i el vèrtex final són el mateix, el que tindrem és un *cicle eulerià* o *circuit eulerià*.

Quin criteri tenim per a decidir si un graf G conté un camí eulerià o bé un circuit eulerià, o cap d'ells? Per a respondre aquesta pregunta ens cal definir un paràmetre clau en grafs. Donat un graf G i un vèrtex $v \in V$ de G, el seu *grau* (que denotarem indistintament amb $d(v)$, $\deg(v)$ o $\mathrm{gr}(v)$) és el nombre d'arestes adjacents amb v. Aquí l'adjacència es compta amb multiplicitat: es té consideració, per exemple, si hi ha arestes múltiples. Així, en el nostre cas tenim tres vèrtexs de grau 3 i un vèrtex de grau 5. A més a més d'aquesta definició, ens cal també una altra condició natural per a poder formular amb precisió la qüestió que estem tractant: cal que el graf sigui connex. Dit d'una altra manera, ens cal que puguem passejar d'un vèrtex v arbitrari a qualsevol altre vèrtex w a través d'una seqüència de vèrtexs adjacents per arestes. És clar que, si un graf no és connex, aleshores és impossible l'existència de cicles (ni camins) eulerians. En tot cas, si un graf no és connex, aleshores defineix una sèrie de subgrafs connexos, corresponents als seus subgrafs maximals connexos. Anomenarem cadascun d'aquests subgrafs *component connexa* del graf. En particular, un graf connex té només una component connexa.

Amb tots aquests conceptes ja podem enunciar i demostrar el teorema següent, que inicia tota la teoria de grafs:

TEOREMA 1 (EULER, 1736). *Sigui $G = (V, A)$ un multigraf connex. Aleshores G admet un circuit eulerià si i només si tots els vèrtexs de G tenen grau parell.*

Observeu que, abans de passar a demostrar aquest resultat, i si donem aquesta afirmació per bona, tenim de manera immediata la condició necessària i suficient per a assegurar l'existència (o no) de camins eulerians en grafs connexos: un multigraf admet un camí eulerià si i només si tots els vèrtexs *llevat de dos* tenen grau parell. Efectivament: si admet un camí eulerià, realitzem-lo i mirem el primer i l'últim vèrtexs. Si ara afegim una aresta entre aquests dos (una aresta que no hi fos al principi), podrem completar el camí eulerià a un circuit eulerià fent un pas més, i el teorema d'Euler ens diu que tots els vèrtexs en el nou graf tenen grau parell. Per tant, el graf inicial complia que tots els graus eren parells llevat dels vèrtexs inicial i final en el camí eulerià. Recíprocament, si tenim un multigraf que compleix la condició de graus que indiquem i afegim una aresta entre els vèrtexs de grau senar, obtenim aleshores un nou graf amb tots els vèrtexs de grau parell. Ara podem aplicar el teorema d'Euler, construir el circuit eulerià i finalment esborrar l'aresta que hem afegit al principi per recuperar un camí eulerià en el graf original. En particular, el nostre argument ens demostra que el graf associat als ponts de Königsberg no compleix cap de les hipòtesis, ja que té quatre vèrtexs de grau senar.

Vegem, ara ja, la prova del teorema.

PROVA. Començarem per la implicació més fàcil. Suposem que el nostre graf té un circuit eulerià. Aleshores, a l'hora de recórrer-lo segons les arestes, cada cop que entrem a un vèrtex, en el següent pas en sortirem. Com que cada vegada que s'entra a un vèrtex per una aresta se n'acaba sortint per una de diferent, en resulta que necessàriament tots els vèrtexs han de tenir grau parell.

Vegem ara la implicació contrària: suposem ara que en el nostre graf tots els vèrtexs tenen grau parell i el que volem és construir un circuit eulerià. Ho farem per inducció: per a $n = 2$ vèrtexs és clar que els únics multigrafs que compleixen la propietat són les arestes múltiples, en què cadascun dels dos vèrtexs té grau parell. Aleshores és immediat observar que aquest graf tan simple conté cicles eulerians.

Així doncs, suposem que el resultat és cert per a tot graf amb un nombre de vèrtexs inferior a n (i, per tant, assumint que tots els vèrtexs són de grau parell) i demostrem-ho per als grafs amb n vèrtexs. Triem un vèrtex arbitrari v i una aresta qualsevol adjacent amb v. Continuem ara seleccionant arestes consecutives i anem passejant pel graf fins que tornem a v. L'important és veure que no cal que ens preocupem gaire de com fem les tries locals en cada vèrtex: sabem que mai no ens quedarem atrapats, ja que cada vèrtex té grau parell. Ras i curt: si entrem a un vèrtex, hi ha com a mínim una manera de sortir-ne.

Si quan retornem a v hem exhaurit totes les arestes, aleshores ja haurem acabat, tot trobant un circuit eulerià. Què passa quan això no succeeix, és a dir, quan aquest cicle no cobreix totes les arestes? Sigui A_v el conjunt d'arestes visitades en el nostre cicle inicial. Considerem aleshores el graf amb els vèrtexs adjacents amb arestes encara no recorregudes i arestes $A \setminus A_v$ (el conjunt d'arestes no recorregudes). Cada vèrtex d'aquest graf té grau parell i té menys de n vèrtexs, però pot ser que no sigui connex. En tot cas, per la hipòtesi d'inducció, podem trobar un circuit eulerià per a cada component connexa. Com concloem ara l'argument? Com que el graf original era connex, cadascun dels subcircuits eulerians que hem construït per inducció tenen algun vèrtex que és adjacent amb una aresta de A_v. Aleshores podem construir finalment un circuit eulerià del graf inicial tot inserint al subcircuit eulerià definit per A_v els subcircuits que hem trobat per inducció. Més que fer un argument més formal, dirigim el lector a la figura 3 per tal d'aclarir aquest argument.

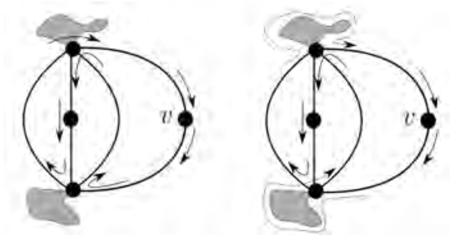

FIGURA 3: Pas final en la prova del teorema d'Euler: a partir d'un subcircuit eulerià associat a les arestes A_v, ampliem el circuit usant la hipòtesi d'inducció en les components connexes resultants d'eliminar les arestes de A_v del graf original.

2.1 La infància de la teoria de grafs: mapes i topologia de baixa dimensió

No és nou que afirmem que Euler va ser un visionari, i l'evolució de la teoria de grafs ho demostra un cop més. Després de la seva astuta solució del problema dels ponts de Königsberg (que defineix amb precisió el naixement de la disciplina), per passar a la infància de la teoria de grafs ens hem de desplaçar al període comprès entre mitjans del segle XIX i primer quart del segle XX. En aquest període comencen a emergir preguntes de tota mena: algunes amb implicacions pràctiques, algunes de tipus recreatiu, però la matemàtica convencional de l'època no podia donar resposta a cap d'elles. Ens centrarem amb més detall en dues d'aquestes preguntes, així com la seva influència posterior. L'ocasió val per a recordar diverses contribucions essencials a la teoria de grafs realitzades durant el segle XIX, com són la teoria de xarxes elèctriques i el teorema matriu-arbre de Gustav Kirchhoff (que en bona part inicia la teoria espectral de grafs), la fórmula de Cayley per al nombre de grafs connexos i acíclics (deguda a Arthur Cayley) i el problema de l'existència de cicles hamiltonians en grafs (degut a William Hamilton).

De tots els problemes amb un sabor de tipus discret sorgits durant el segle XIX, possiblement el de més ressò i recorregut ha estat el següent. L'any 1852 el matemàtic i botànic sud-africà (però nascut a Londres) Francis Guthrie va observar que necessitava només quatre colors per a acolorir les regions del mapa dels comptats d'Anglaterra, de manera que regions adjacents no podien acolorir-se amb el mateix color. D'aquest mapa concret, Francis en va generalitzar la pregunta següent:

És cert que tot mapa geogràfic pot acolorir-se amb quatre colors?

L’any 1854 el problema es va plantejar públicament en la revista britànica *The Athenaeum*, i sis anys més tard Augustus De Morgan (que havia estat mentor del germà de Francis) el va tornar a reviure, sense èxit, a la mateixa revista. Tot i així, el problema va començar a circular en els cercles matemàtics anglesos: per exemple, per esmentar dos noms rellevants, De Morgan va enviar una carta a Sir William Hamilton, que tampoc no va ser capaç de resoldre’l (de fet, no se sap gaire bé si ni tan sols va treballar-hi: simplement se sap que no es va pronunciar en relació amb aquest tema). Durant molts anys, matemàtics i no matemàtics, experts i investigadors aficionats van intentar resoldre el problema. És a dir, demostrar que quatre colors són suficients per a donar una coloració vàlida a qualsevol mapa. El problema dels quatre colors es va fer tan famós que l’any 1878 el gran matemàtic anglès Arthur Cayley (que ja ocupava la seva càtedra *Sadleirian* a Cambridge) el va proposar formalment davant de la Societat Matemàtica de Londres (la prestigiosa London Mathematical Society), una de les societats matemàtiques més importants i antigues del món en aquella època.

FIGURA 4: Una coloració amb quatre colors de les regions del Regne Unit i la carta de De Morgan adreçada a Hamilton.

Malgrat els intents més o menys infructuosos i la introducció d’idees molt interessants (com la prova incorrecta d’Alfred Kempe, que introdueix la noció de *cadena de Kempe* i la idea de *descàrrega*), no va ser fins l’any 1976 que Kenneth Appel i Wolfgang Haken (vegeu [2] i [3]) van anunciar la prova del teorema (més de cent anys després de la seva formulació) usant tant idees importants desenvolupades en el passat (com algunes de les idees en la fallida prova de Kempe) com tècniques computacionals molt noves a l’època (estem parlant dels anys setanta del segle XX). De fet, en el seu resultat hi ha una comprovació exhaustiva de casos que és massa gran per a ser verificada a mà. Aquest fet ha obert molts cops la discussió de si una demostració assistida per ordinador (de la qual cap ésser humà no podrà mai, en una vida, comprovar tots els casos) és realment una prova. Avui en dia, malgrat que s’ha pogut simplificar el nombre de casos, el teorema dels quatre colors no s’ha pogut reduir encara a una prova «humana».

Amb la formulació del teorema dels quatre colors, de fet, s’obre també la interacció de la teoria de grafs amb la topologia de dimensió baixa. En tot el plantejament que hem fet fins ara és important notar que els objectes que s'estan considerant (mapes geogràfics) tenen una propietat de tipus geomètric molt important: els mapes estan dibuixats en el pla. Aquest fet es pot formular de manera més formal definint el que és un graf planar junt amb una immersió en el pla. Amb més precisió, donat un graf $G = (V, A)$, direm que és *planar* si admet una representació gràfica en el pla on dibuixarem 1) els vèrtexs com a punts del pla, 2) les arestes com a corbes tancades que no s'autotallin i que tindran com a extrems vèrtexs del graf, i 3) parells d'arestes que no es tallen, llevat, possiblement, als vèrtexs extrems. Un graf planar no està dibuixat, doncs (és un objecte abstracte), i en general el podrem representar de diverses maneres en el pla (podrà tenir, doncs, diverses immersions en el pla). Amb això que estem dient, un graf planar immers en el pla tindrà més estructura que en un graf planar per si sol, ja que, a més dels vèrtexs i de les arestes, tindrà *cares*, que són cadascuna de les regions 2-dimensionals en les quals el graf dibuixat descompon el pla (incloent-hi la cara no fitada). Si el graf és finit (el nombre de vèrtexs i d'arestes és finit), aleshores el nombre de cares també ho serà.

Introduïdes aquestes definicions, com associem a un mapa geogràfic un graf planar immers en el pla? Bé: si tenim el nostre mapa geogràfic preferit, el que fem és construir l'anomenat *graf dual* del mapa com segueix: pintem en cadascuna de les cares un vèrtex i direm que dos vèrtexs són adjacents si les cares corresponents es toquen (vegeu la figura 5). De la definició està clar que el graf dual és planar (podem dibuixar les arestes sense talls sense cap problema) i que el dibuix mateix dona lloc a una immersió vàlida. Un exemple d'aquesta construcció la trobem a la figura 5, amb el mapa de comarques de Catalunya.

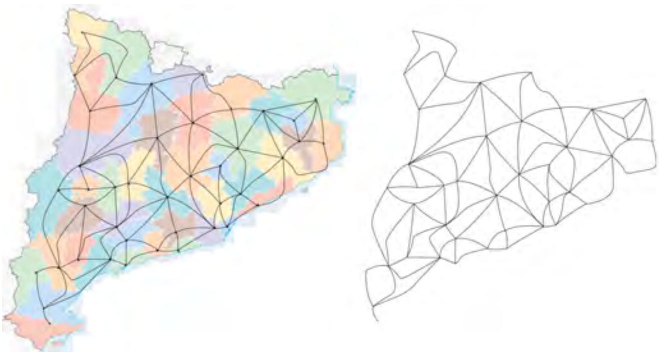

FIGURA 5: El mapa dual de les comarques de Catalunya.

Com introduïm ara la noció de coloració? Si tenim un graf $G = (V, A)$, definim una *coloració* (per vèrtexs) de G amb k colors com una funció $c\colon V \to [k]$. Direm, a més, que c és *pròpia* si per a cada aresta $\overline{vw} \in A$, $c(v) \neq c(w)$. Això vol dir que en una coloració pròpia els extrems de cada aresta tenen color diferent. Finalment, entre totes les coloracions pròpies d'un graf, volem prendre la que usa el menor nombre de colors. Aquest valor (el valor mínim pel qual existeix una coloració pròpia de G) és un paràmetre extremament important i extremament díficil d'estudiar: estem parlant de l'anomenat *nombre cromàtic* de G, que denotarem amb $\chi(G)$. En el context del teorema dels quatre colors, aquest llenguatge ens afirma que tot graf planar G (no ens preocupem de com dibuixar-lo) té nombre cromàtic $\chi(G) \leq 4$.

Tornarem a questions relatives al nombre cromàtic més endavant, però ara ens preocuparem d'una segona qüestió relativa als grafs planars no menys important. És la següent:

Quan podem assegurar que un graf simple donat és planar?

És clar que, si ens donen un graf (en el sentit abstracte del concepte) i som capaços de dibuixar-lo en el pla sense talls de les arestes, haurem demostrat que el graf és planar. Però com demostrem que un graf donat no pot dibuixar-se en el pla sense talls de les arestes? No ha de dependre del fet que tinguem talent dibuixant grafs sense talls, sinó d'alguna propietat intrínseca dels grafs que ens cal caracteritzar.

Per a poder veure quines condicions ens calen, primer necessitem una eina de tipus topològic de gran importància: de nou, aquí Euler ens dona una relació màgica que ens lliga el nombre de vèrtexs i el nombre d'arestes en un graf planar. La relació fonamental és que, si $G = (V, A)$ és un graf (simple o no), aleshores la quantitat $|A| - |V| + 2$ (intrínseca al graf) és igual al nombre de cares en qualsevol immersió de G en el pla. La fórmula d'Euler ens diu, doncs, que qualsevol dibuix d'un graf planar en el pla sense talls d'arestes definirà el mateix nombre de cares.

Com a conseqüència d'aquesta relació clau, tindrem que els grafs planars simples no poden tenir gaires arestes. En efecte: donat un graf planar G amb $|V|$ vèrtexs en $|A|$ arestes, sabem que aquest definirà un nombre de cares igual $c = |A| + 2 - |V|$. Tenim ara dues observacions importants: la primera és que cada cara té longitud com a mínim 3, ja que no podem tenir cares de mida 1 o 2 perquè no acceptem ni llaços ni arestes dobles (recordem que estem treballant amb grafs simples). I la segona: sempre que tinguem un graf planar immers, podrem afegir més arestes en cadascuna de les cares mentre aquestes no siguin triangles, i, tot i així, mantenir la condició de planaritat. Per tant, el que estem dient és que els grafs planars simples amb més arestes són aquells totes les cares dels quals són triangles. Un exemple d'aquest argument pot trobar-se a la figura 6.

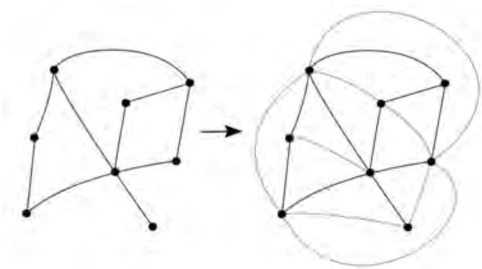

FIGURA 6: A partir d'un graf dibuixat, tot afegint arestes, aconseguim que totes les cares siguin triangles.

D'aquí, mitjançant doble comptatge, en aquests grafs (que anomenem, com no pot ser d'una altra manera, *triangulacions*) es compleix que $3c = 2|A|$ (cada cara és adjacent amb tres arestes, i cada aresta és adjacent amb dues cares). Finalment, substituint a la fórmula d'Euler aquesta relació, concloem que $\frac{2}{3}|A| = |A| + 2 - |V|$. Per tant, un graf planar simple amb $|V|$ vèrtexs no pot tenir més de $3|V| - 6$ arestes.

A partir d'aquesta observació, vegem un parell d'exemples de grafs que no són planars. Comencem amb el graf K_5: aquest és el graf que té cinc vèrtexs i totes les arestes possibles, és a dir, un total de $\binom{5}{2} = 10$. Com que cada terna de vèrtexs de K_5 defineix un triangle, concloem que, si K_5 fos representable en el pla amb un dibuix sense talls d'arestes, aleshores totes les cares haurien de ser triangles. Però aleshores el nombre d'arestes de K_5 hauria de ser $3 \times 5 - 6 = 9$, que és inferior al nombre real d'arestes que tenim, que són 10. Contradicció.

Un cas un pèl més complicat és el del graf anomenat $K_{3,3}$ (vegeu el graf central en la figura 7): és un graf amb sis vèrtexs repartits en dos conjunts de mida 3, $V = V_1 \cup V_2$, $|V_i| = 3$, tal que cada vèrtex de V_1 està unit amb tots els vèrtexs de V_2 (tenim, per tant, nou arestes en total). Es tracta d'un graf bipartit, amb nombre cromàtic igual a 2 (basta acolorir els vèrtexs de V_1 amb color diferent dels de V_2, i ja tenim així la bipartició de colors). En aquest cas tenim que en una hipotètica immersió plana de $K_{3,3}$ totes les cares haurien de ser de longitud 4 (no podem tenir longitud 3). Aplicant el mateix argument de doble comptatge que abans, però usant cicles de longitud 4 i no triangles, en resultaria que $4c = 2|A|$, i la relació en la fórmula d'Euler és que el nombre d'arestes aquí és igual a $2|V| - 4$. Finalment, això ens donaria $2 \times 6 - 4 = 8$ arestes, però en el graf $K_{3,3}$ en realitat en tenim $3 \times 3 = 9$; per tant, arribem a una contradicció.

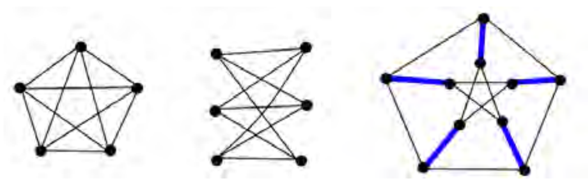

FIGURA 7: Els grafs K_5 (esquerra) i $K_{3,3}$ (centre) i el graf de Petersen (dreta). Si contraiem les arestes blaves, obtenim el graf K_5.

És clar que hi ha grafs més complicats que no són grafs planars: tots els grafs on apareix el graf K_5 (o $K_{3,3}$) com a subgraf (és a dir, com a graf resultant d'eliminar alguns dels vèrtexs i de les arestes del graf original) no podran ser planars. Però això no és suficient: per exemple, l'anomenat *graf de Petersen* (vegeu la figura 7) no conté ni K_5 ni $K_{3,3}$ com a subgraf, però sí que podem obtenir el graf K_5 si fem una contracció de cinc de les arestes del graf. En aquest context, la noció bona de «contenir» un graf no és pas la de subgraf, sinó la de menor: direm que un graf G' és un *menor* de G si G' s'obté a partir de G 1) fent contracció d'algunes de les arestes de G i 2) eliminant vèrtexs i arestes del graf resultant. En la figura 8 mostrem un graf G més complicat que el de Petersen que té com a menor un graf K_5.

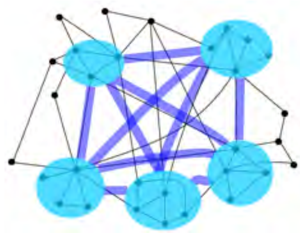

FIGURA 8: Un graf que té com a menor K_5.

El gran resultat que inicia la teoria topològica de grafs, degut al matemàtic polonès Kazimierz Kuratowski (vegeu [22]), és el que caracteritza quan un graf és planar en termes de l'existència de certs menors:

TEOREMA 2 (KURATOWSKI, 1930). *Un graf G és planar si i només si no conté ni K_5 ni $K_{3,3}$ com a menor.*

Per tant, el fet que un graf sigui planar ve donat per dues obstruccions minimals... i només dues! Val a dir, però, que l'enunciat original del teorema de Kuratowski no era en termes de menors, sinó de subdivisions. És interessant parlar de menors perquè la noció va molt més enllà d'aquest teorema. L'observació important que cal fer aquí és que la família dels grafs planars és tancada per menors: això vol dir que, si un graf és de la família, aleshores qualsevol dels seus menors també ho és. Un altre exemple és la família dels boscos (grafs sense cicles), que és tancada per menors perquè en contreure no podem crear nous cicles. En aquest cas, el menor que cal evitar és qualsevol cicle, i el menor més petit en aquest cas és el triangle. Per tant, la família dels arbres es pot definir com la família dels grafs que exclouen el triangle com a menor.

Amb aquests dos exemples en ment, la gran conjectura de la teoria de menors va ser formulada per Klaus Wagner l'any 1937: la conjectura afirmava que, si tenim una família infinita de grafs, necessàriament hi ha d'haver un graf de la família que és menor d'un altre. Aquesta conjectura ha definit un dels grans programes de recerca en teoria de grafs del segle XX: en una sèrie de vint treballs molt tècnics, Neil Robertson i Paul Seymour van desenvolupar durant més de vint anys el que avui es coneix com a *teoria de menors*, branca que ha influït decisivament no només la teoria estructural de grafs, sinó també la informàtica teòrica i la teoria de complexitat. En aquesta sèrie de treballs, que culminen amb la prova de la conjectura de Wagner, aconsegueixen donar caracteritzacions molt precises de quin és l'aspecte d'una família de grafs tancada per menors, culminant amb un dels grans triomfs de la matemàtica contemporània amb el que es coneix com a *teorema de Robertson-Seymour*, i que generalitza de manera impressionant el teorema de Kuratowski:

Teorema 3 (Robertson-Seymour, 1983–2004). *Una família de grafs $\mathcal{G}$ tancada per menors ve caracteritzada per l'exclusió d'un nombre* finit *de menors minimals.*

Per tant, la mateixa situació que es donava en els grafs planars i en els boscos (les dues famílies es caracteritzaven excloent 2 i 1 grafs, respectivament) de fet es compleix en un sentit molt més general. El lector interessat en aquesta teoria, tema central actual en la teoria de grafs i també en la teoria de matroides (en què s'està desenvolupant un programa anàleg al realitzat per a grafs), pot començar amb l'article de Lovász [23], que dona una visió molt general del monumental treball fet per Neil Robertson i Paul Seymour.

3 El naixement del pensament probabilístic en teoria de grafs

Tornem de nou al primer terç del segle XX. Fins ara la teoria de grafs consistia en un aiguabarreig de resultats sense un pal de paller gaire clar. Alguns problemes havien sorgit de la física, d'altres havien sortit de la topologia de baixa dimensió, però el temps ha demostrat que tots ells han aportat idees molt interessants i fructíferes al coneixement i que s'han explotat àmpliament per a donar lloc a matemàtiques molt profundes i interessants.

Possiblement a partir dels anys trenta del segle passat, però, hi ha el naixement d'un nou paradigma en la teoria de grafs que ha marcat dramàticament el desenvolupament posterior de la teoria, no només de grafs, sinó de tota la matemàtica discreta. Va ser durant la dècada dels anys quaranta que el gran matemàtic hongarès Pál Erdős (possiblement el màxim exponent de l'escola matemàtica hongaresa d'entreguerres) va introduir un mètode sistemàtic que permetia estudiar un gran ventall de problemes en matemàtica discreta. Ho mostrarem amb un exemple.

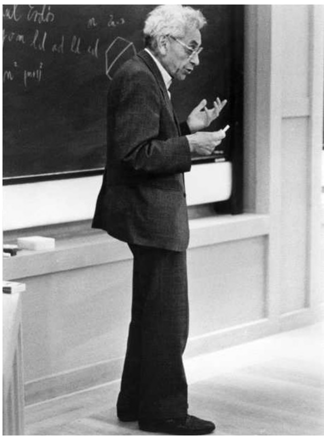

Figura 9: Fotografia de Pál Erdős, pare del mètode probabilístic en teoria de grafs (any 1991, Cambridge).

Per explicar el problema que estudiarem ens cal primer definir un nou paràmetre sobre grafs. El paràmetre que ens interessarà ara és l'anomenat *coll* d'un graf. Donat un graf $G = (V, A)$, direm que el seu coll $g(G)$ és la mida del cicle més curt contingut en G. En cas que el graf no tingui cicles (és a dir, sigui un graf acíclic), direm que el seu coll és infinit. Observeu que, si un graf té moltes arestes, és raonable que apareguin cicles curts. O, dit d'una altra manera, un nombre elevat d'arestes hauria de donar lloc de manera natural a un coll petit (i, recíprocament, poques arestes haurien de donar lloc, en la majoria dels casos, a cicles llargs).

La pregunta que ens fem ara és la següent:

> Fixem una parella de valors enters no negatius c i g. Existeix un graf $G = (V, A)$ que satisfaci que el seu nombre cromàtic és com a mínim c i el seu coll és com a mínim g?

Una observació important és que un nombre d'arestes elevat dona lloc a moltes restriccions per a acolorir els vèrtexs. Per tant, filosòficament, grafs amb moltes arestes haurien de tenir nombre cromàtic elevat (i coll petit, segons hem vist). En sentit contrari, grafs amb molt poques arestes haurien de tenir coll gran (s'assemblaran als arbres) i, com que hi haurà poques adjacències entre vèrtexs, intuïm que el nombre cromàtic hauria de ser petit (poques restriccions i, per tant, necessitat de l'ús de pocs colors). El que estem veient és, doncs, que els dos paràmetres que estem considerant són antagonistes: esperem que, quan un pugi, l'altre baixi, i al revés. Sembla complicat, doncs, trobar un compromís entre els dos paràmetres i trobar una densitat d'arestes adequada per la qual puguem afirmar que tant el coll com el nombre cromàtic són elevats.

La resposta, però, és que sí: sempre existeix un graf que compleix aquestes dues propietats simultàniament.

TEOREMA 4 (ERDŐS, 1959). *Donats c i g enters no negatius, existeix un graf G tal que $g(G) > g$ i $\chi(G) > c$.*

Com podem trobar aleshores un graf que compleixi les propietats que volem? La meravellosa idea d'Erdős en el seu treball [11] (idea que ja havia usat l'any 1947 per a estudiar fites inferiors per als nombres de Ramsey; vegeu [10]) és resoldre el problema de manera existencial: *a priori* no sabrem construir un tal graf, però el que sabrem amb tota seguretat és la seva *existència*. I per demostrar-ho, el que Erdős fa és veure que, en un cert espai de probabilitat, hi ha un esdeveniment que té probabilitat positiva d'ocórrer i que codifica precisament l'existència d'un tal graf. La següent prova d'Erdős inicia l'anomenat *mètode probabilístic en teoria de grafs*.

PROVA. Per començar la prova del teorema, prendrem un valor de n prou gran, que serà el nombre de vèrtexs. Al final de la prova veurem com de gran l'hem de prendre perquè tot l'argument funcioni.

Ara construïm un graf de manera aleatòria com segueix: prenem V amb $|V| = n$, i cada aresta potencial del graf la triem (independentment les unes de les altres) amb probabilitat $p := p(n)$ (més endavant farem créixer la n). Aquest objecte que obtenim és un *graf aleatori*. Per exemple, quantes arestes té el nostre graf? És senzill: és una suma de variables aleatòries de tipus Bernoulli amb probabilitat p, que dona lloc a una variable aleatòria binomial de tipus (n, p). Així, com a conseqüència directa, tenim que el nombre esperat d'arestes en el nostre graf és $\binom{n}{2}p$.

Què ens agradaria fer ara? Voldríem fer una tria de p que alhora donés lloc (amb una probabilitat prou alta) a un graf amb nombre cromàtic elevat i cap cicle prou curt. Vegem com fer-ho. Començarem estudiant l'existència de cicles d'una mida donada. Definim X com la variable aleatòria que compta el nombre de cicles de longitud menor o igual que g. Si denotem amb X_r la variable aleatòria que compta el nombre de cicles de longitud igual a r (per a $r \geq 3$, ja que els cicles són de longitud, com a mínim, 3), tindrem que $X = X_3 + \cdots + X_g$. Estudiem ara cadascuna de les variables aleatòries X_r per separat. Si comencem mirant la seva esperança, $\mathbb{E}[X_r]$, aleshores el seu valor és igual a

$$\mathbb{E}[X_r] = \sum_{C_r} p^r,$$

on la suma $\sum_{C_r}$ s'estén sobre tots els cicles del graf que tinguin longitud r. Ara, cada cicle ve definit per una r-tupla $(v_1, \ldots, v_r)$ de vèrtexs diferents llevat d'ordenacions cícliques i de reflexions de la seqüència (per exemple, el cicle de mida 4 definit per la seqüència ordenada de vèrtexs $(1, 2, 3, 4)$ és el mateix cicle que el $(2, 3, 4, 1)$ i que el $(3, 2, 1, 4)$). Quantes seqüències hi ha? Bé: simplement ens cal agafar una ordenació de r elements diferents (per tant, $(n)_r = n \ldots (n-1) \ldots (n-r+1)$, i dividir-ho entre $2r$ (corresponent a les reflexions i les ordenacions cícliques). En conseqüència, tenim que $\mathbb{E}[X_r] = \frac{(n)_r}{2r} p^r$, i, per tant, el nombre esperat de cicles curts que esperem tenir en el nostre graf amb una llargada inferior a g serà, via la linealitat de l'esperança,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{r=3}^{g} \mathbb{E}[X_r] = \frac{1}{2} \sum_{r=3}^{g} \frac{(n)_r}{r} p^r.$$

En aquest punt, veiem que, si prenem p prou gran, podrem aconseguir fer aquest valor esperat negligible. En efecte, si prenem $p = n^{\theta - 1}$, on $\theta < \frac{1}{g}$, tindrem que, per a n prou gran, $(n)_r \leq n^r$ i, a més,

$$\frac{1}{2} \sum_{r=3}^{g} \frac{(n)_r}{r} p^r \leq \sum_{r=3}^{g} \frac{(np)^r}{2r} \leq \sum_{r=3}^{g} \frac{n^{\theta r}}{2r} \leq n^{\theta g} \sum_{r=3}^{g} \frac{1}{2r}.$$

Com que hem pres $\theta g < 1$, resulta que en aquest terme, per a g fix, la suma $\sum_{r=3}^{g} \frac{1}{2r}$ és finita i, per tant,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} n^{\theta g} \sum_{r=3}^{g} \frac{1}{2r} = 0,$$

i, així, concloem que $\mathbb{E}[X] = o(n)$. Per què és útil ara aquesta fita? Bé, si ara usem la desigualtat de Markov, el que tenim és que

$$\Pr\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{n} = o(1),$$

o, dit d'una altra manera: per la tria que hem fet de p, la probabilitat que el nombre de cicles de longitud menor o igual que g sigui gran (en aquest cas, $n/2$) tendeix a 0. Per tant, típicament els cicles del nostre graf construït de manera aleatòria seran *llargs*, tot i que en pot tenir uns quants (com a màxim $n/2$) de curts.

Anem ara al segon paràmetre. Aquesta idea que hem usat d'estimar l'esperança del nombre de cicles de longitud donada i després aplicar la desigualtat de Markov ha estat possible perquè hem estat capaços de descompondre la variable aleatòria corresponent en variables més simples, i amb això hem pogut calcular la seva esperança. Aquest principi, malauradament, no funciona quan toca estudiar el nombre cromàtic. Això és així perquè aquest paràmetre és molt més complex, ja que exhibeix un comportament local-global difícil de codificar amb el mètode probabilístic. Malgrat això, no tot és temps perdut, perquè hi ha un paràmetre en grafs molt relacionat amb el nombre cromàtic i que és sensible al tractament probabilístic: estem parlant del *nombre d'independència*.

Donat un graf G, direm que el seu *nombre d'independència* (que denotarem amb $\alpha(G)$) és la mida màxima d'un conjunt de vèrtexs $U \subset V$ tal que cap parella de vèrtexs en U no defineix una aresta. Amb aquesta definició, aleshores és clar que per a qualsevol graf $G = (V, A)$ es compleix que $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq |V|$. Com que podem acolorir el nostre graf G amb $\chi(G)$ colors, aleshores cada classe de colors defineix un conjunt independent de vèrtexs (dos vèrtexs del mateix color no poden ser adjacents). Com que cada classe de colors de vèrtexs té mida inferior a $\alpha(G)$, en resulta, doncs, que $\alpha(G) \cdot \chi(G)$ és com a mínim el nombre total de vèrtexs.

Aquesta desigualtat que acabem de demostrar serà molt útil: de fet, és equivalent al fet que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$, i, per tant, trobar fites superiors per a $\alpha(G)$ es traduirà immediatament en fites inferiors per a $\chi(G)$. De fet, aquesta missió serà possible: de nou tornem a prendre el nostre model de graf aleatori. Aleshores,

$$\Pr(\alpha(G) \geq x) \leq \binom{n}{x}(1-p)^{\binom{x}{2}},$$

ja que, si $\alpha(G) \geq x$, aleshores hi ha un subconjunt de x vèrtexs que defineixen un conjunt independent (i aquí el que fem és aplicar la fita de la unió). Ara, fent que $\binom{n}{x} \leq n^x$ i que $(1-p)^x \leq e^{-px}$ quan p tendeix a 0, tindrem que

$$\binom{n}{x}(1-p)^{\binom{x}{2}} \leq (ne^{p(x-1)/2})^x.$$

Si ara triem la probabilitat p com hem fet abans (és a dir: $p = n^{\theta-1}$, on $\theta g < 1$) i, fixada aquesta p, definim $x := \lfloor \frac{3}{p}\log(n) \rfloor = \lfloor 3n^{1-\theta}\log(n) \rfloor$, aleshores és clar que x tendeix a infinit quan n creix i, per aquesta tria,

$$\lim_{n\leftrightarrow\infty} (ne^{p(x-1)/2})^x = 0.$$

Per tant, hem demostrat que

$$\Pr(\alpha(G) \geq \lfloor 3n^{1-\theta}\log(n) \rfloor) = o(1).$$

Resumint: si prenem n prou gran de tal manera que, simultàniament, $\Pr\left(X \geq \frac{n}{2}\right)$ i $\Pr(\alpha(G) \geq x)$ són menors que $1/2$, aleshores sabem que la intersecció dels esdeveniments complementaris té probabilitat estrictament més gran que 0. Un tal esdeveniment conté un graf G que, en particular, compleix que 1) té menys de $n/2$ cicles de longitud menor o igual que g i 2) $\alpha(G) < 3n^{1-\theta}\log(n)$, i, per tant, compleix que

$$\chi(G) > \frac{n}{3n^{1-\theta}\log(n)} = 3\frac{n^{\theta}}{\log(n)}.$$

Ara ja ho tenim gairebé tot: el graf G, del qual hem assegurat l'existència, no compleix exactament el que volíem, ja que encara podria tenir cicles curts. Per resoldre-ho aplicarem una altra idea important en aquesta teoria: l'alteració. A partir del graf aleatori G que hem construït, del qual sabem que té menys de $n/2$ de longitud menor o igual que g, construïm un nou graf G' tot eliminant, per a cadascun dels cicles curts, un dels vèrtexs adjacents (i les corresponents arestes). Com que tenim com a màxim $n/2$ cicles curts, estem fent desaparèixer com a màxim $n/2$ vèrtexs d'un total de n, amb la qual cosa al final del procés el graf no desapareix. I amb això el graf G' té com a mínim $n/2$ vèrtexs i, ara sí, no té cap cicle de longitud menor que g. Ja per acabar, com que hem eliminat una sèrie de vèrtexs, és clar que $\alpha(G') \leq \alpha(G)$ i, per tant, $\chi(G')$ en aquest cas, serà més gran o igual que $6\frac{n^{\theta}}{\log(n)}$. L'argument, doncs, el finalitzem prenent n tal que aquest paràmetre sigui més gran que c, i amb això haurem acabat. □

Una vegada vista aquesta prova, la pregunta natural és: per què el mètode probabilístic funciona tan bé en el context de la teoria de grafs, tal com hem vist en aquest exemple? La resposta que donarem és poc precisa, però mostra prou bé la filosofia subjacent quan es treballa amb el mètode probabilístic. La primera i més important observació és que atacs directes (és a dir, de trobar grafs explícits que compleixen les propietats considerades) no són eficients, i que, per tant, cal anar en la direcció de proves no constructives. La segona observació és que els grafs són objectes amb molt poca estructura, en el sentit que un graf qualsevol té molt poques limitacions i que, per altra banda, poden tenir restriccions de tipus local-global com les que hem estudiat en tractar el nombre cromàtic. Finalment, la tercera observació és que en moltes construccions no volem privilegiar cap vèrtex, o, dit d'una altra manera, volem repartir de manera uniforme les arestes. Totes aquestes observacions fan que el fet de triar les arestes a l'atzar tingui molt de sentit, ja que permet paral·lelitzar la feina i maximitzar la probabilitat (mai més ben dit) d'èxit en la nostra cerca.

Per comparar-ho amb altres estructures amb una estructura algebraica més rígida, per exemple no disposem d'un model de grup finit aleatori que sigui prou satisfactori. En aquesta direcció, Misha Gromov (vegeu [19, 20]) estudia la noció de grup aleatori, tot prenent un conjunt de n generadors i un nombre determinat de relacions aleatòries de longitud prescrita. Tanmateix, els seus grups són en general infinits, i per a definir un grup finit aleatori ens calen suficients relacions per a fer-lo finit; si en triem massa, aleshores hi ha el risc que el grup esdevingui trivial. En aquest cas, doncs, la rigidesa algebraica de l'estructura juga en contra de poder emprar tècniques probabilístiques.

4 Grafs aleatoris

En la seva solució del problema de l'existència de grafs amb coll i nombre cromàtic arbitràriament gran, Erdős va introduir la idea d'emprar un paràmetre p per a mesurar la probabilitat d'incloure una aresta en un graf. Va ser, però, el matemàtic americà Edgarg Gilbert qui l'any 1959 (vegeu [17]) va introduir com a model *per se* (i no com una idea auxiliar) el graf aleatori amb n vèrtexs en què cada potencial aresta es tria independentment de les altres amb probabilitat p. És el que s'anomena *model de Gilbert* i que s'acostuma a denotar amb $\mathcal{G}(n,p)$. Paral·lelament al model de Gilbert, Pál Erdős i el seu col·laborador i amic Alfred Rényi van introduir un model molt similar de graf aleatori a [12], però amb un sabor molt més combinatori. $\mathcal{G}(n,m)$ es defineix com segueix: prenem els grafs amb n vèrtexs i m arestes, i entre tots ells en prenem un uniformement a l'atzar. Com que tenim $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ tries de m arestes entre les $\binom{n}{2}$ possibles, resulta que la probabilitat de triar un graf en concret és $\binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}$. Aquest model és conegut com a *model d'Erdős-Rényi*. De fet, en un cert sentit, és asimptòticament equivalent al model de Gilbert: per a n prou gran, el nombre esperat d'arestes en el model $\mathcal{G}(n,p)$ és igual a $p\binom{n}{2}$. Aleshores, prenent $m = p\binom{n}{2}$, resulta que el graf $\mathcal{G}(n,m)$ i el graf $\mathcal{G}(n,p)$ tenen el mateix aspecte qualitatiu (vegeu l'enunciat formal d'aquest fet i la prova a [15]). Com que és molt més còmode treballar amb $\mathcal{G}(n,p)$ que amb $\mathcal{G}(n,m)$ (en el primer tenim la independència en la tria de les arestes), d'aquí endavant només treballarem amb el model $\mathcal{G}(n,p)$.

Vegem, doncs, algunes de les característiques de $\mathcal{G}(n,p)$. Com ja hem mencionat, el seu nombre d'arestes és la suma de $\binom{n}{2}$ variables aleatòries independents de tipus Bernoulli amb probabilitat d'èxit igual a p (on associem l'èxit amb triar l'aresta corresponent), i d'on tenim, doncs, una distribució de tipus binomial. Estudiarem ara un paràmetre un pèl més complicat: el nombre de triangles. En aquest cas, aquesta variable aleatòria, que anomenarem $X_\triangle := X_\triangle(n)$, pot escriure's com

$$X_\triangle = \sum_{\triangle_{i,j,k}} \mathbb{1}_{e_{i,j}} \mathbb{1}_{e_{j,k}} \mathbb{1}_{e_{i,k}},$$

on $\triangle_{i,j,k}$ és el triangle definit pels vèrtexs v_i, v_j i v_k (amb arestes $e_{i,j}$, $e_{j,k}$ i $e_{i,k}$, respectivament, que uneixen v_i, v_j i v_k seguint la notació dels índexs), i on $\mathbb{1}_{e_{i,j}}$ és la variable aleatòria indicadora d'haver triat l'aresta $e_{i,j}$. Per tant, $\mathbb{1}_{e_{i,j}}$ té una distribució de Bernoulli amb paràmetre p.

En general, donat un valor de n, no serem capaços de trobar la distribució de probabilitat *exacta* de $X_\triangle$, però el que sí que podrem fer és veure'n el comportament asimptòtic. Donats tres vèrtexs v_i, v_j, v_k del graf, definim $X_{\triangle_{i,j,k}}$ com la variable indicadora que val 1 si tenim el triangle amb vèrtexs v_i, v_j, v_k, i, per tant, $X_\triangle = \sum_{\{i,j,k\}\subseteq[n]} X_{\triangle_{i,j,k}}$, on la suma es pren per ternes d'índexs diferents dos a dos. A més a més, $X_{\triangle_{i,j,k}}$ és igual a $\mathbb{1}_{e_{i,j}}\mathbb{1}_{e_{j,k}}\mathbb{1}_{e_{i,k}}$, on $\mathbb{1}_{e_{i,j}}$ és la variable aleatòria indicadora que mostra si l'aresta amb extrems v_i i v_j és en el graf (això, és clar, perquè, per assegurar que el triangle $\triangle_{i,j,k}$ és en el graf, ens cal estar segurs que les tres arestes $e_{i,j}$, $e_{j,k}$ i $e_{i,k}$ hi són). Amb aquesta terminologia, l'esperança de $X_\triangle$ és igual, doncs, a

$$\mathbb{E}[X_\triangle] = \mathbb{E}\left[\sum_{\triangle_{i,j,k}} \mathbb{1}_{e_{i,j}}\mathbb{1}_{e_{j,k}}\mathbb{1}_{e_{i,k}}\right] = \sum_{\triangle_{i,j,k}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{e_{i,j}}\mathbb{1}_{e_{j,k}}\mathbb{1}_{e_{i,k}}] = \binom{n}{3}p^3,$$

ja que les variables aleatòries indicadores són independents (l'esperança del producte es tradueix en el producte d'esperances), i perquè en la suma tenim un total de $\binom{n}{3}$ termes, corresponents a triar tres vèrtexs diferents del total de n que tenim.

Vegem què passa quan n tendeix a infinit. Per una banda, $\binom{n}{3}$ és asimptòticament igual a $\frac{1}{6}n^3$, i, per tant, $\mathbb{E}[X_\triangle]$ és asimptòticament igual a $\frac{1}{6}(np)^3$. Triant p de manera que np tendeix a 0, observem que l'esperança tendeix a 0. Com que estem prenent una seqüència de variables aleatòries *positives*, podem concloure que, si el límit de les esperances és igual a 0, aleshores necessàriament, quan n tendeix a infinit, la variable aleatòria $X_\triangle$ tendirà cap a la variable aleatòria idènticament igual a 0. Resumint: per a p prou petita (en aquest cas d'un ordre de magnitud inferior a $\frac{1}{n}$), quan n és molt gran no observarem triangles.

Què passa quan np tendeix a infinit? El que veiem aquí és que l'esperança creix cap a infinit, però d'aquí no podem assegurar que $X_\triangle$ sigui sempre estrictament més gran que 0: podria succeir, en principi, que $\Pr(X_\triangle = 0) > 0$ i, a més, que $\mathbb{E}[X_\triangle]$ tendís a infinit quan n s'anés fent gran (recordem que $X_\triangle$ és una variable que al final depèn de n).

Per veure que això no pot passar en el nostre cas, usarem un argument de concentració: veurem que la majoria de la massa de la distribució de probabilitat de $X_\triangle$ està al voltant del seu valor esperat, i que, per tant, $P(X_\triangle = 0)$ tendirà cap a 0 quan n tendeixi a infinit. Això ho podem fer tot mirant la seva variància i aplicant la desigualtat de Txebixev. Efectivament: la variància de $X_\triangle$ és igual a $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_\triangle] = \mathbb{E}[X_\triangle^2] - \mathbb{E}[X_\triangle]^2$. No desenvoluparem el càlcul en detall, però el petit problema que sorgeix és que les diferents variables aleatòries $X_{\triangle_{i,j,k}}$ no són independents, i, per tant, aquesta variància té dues contribucions: 1) la contribució de les variàncies de cadascuna de les variables aleatòries $X_{\triangle_{i,j,k}}$ i 2) la contribució de les correlacions entre cadascuna de les parelles $X_{\triangle_{i,j,k}}$ i $X_{\triangle_{i',j',k'}}$ (sent $\triangle_{i,j,k}$ i $\triangle_{i',j',k'}$ triangles diferents que comparteixen alguna aresta). Al final s'observa que $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_\triangle]/\mathbb{E}[X_\triangle]^2$ tendeix a 0 quan n tendeix a infinit, i, per tant, aplicant la desigualtat de Txebixev, tindrem que per a qualsevol tria de $\varepsilon > 0$

$$\Pr(|X_\triangle - \mathbb{E}[X_\triangle]| > \varepsilon\mathbb{E}[X_\triangle]) \leq \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_\triangle]}{\varepsilon^2\mathbb{E}[X_\triangle]^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Concloem, doncs, que, si np tendeix a infinit, aleshores $\Pr(X_\triangle > 0)$ tendeix a 1. Del que hem fet, però, queden dues preguntes per resoldre: la primera, què passa quan np tendeix a una constant diferent de 0? I la segona: quan np tendeix a infinit, podem donar amb una mica més de precisió com són les desviacions $X_\triangle - \mathbb{E}[X_\triangle]$? La resposta a aquestes dues preguntes la podem encapsular dins del teorema següent:

Teorema 5. *Considerem en el model $\mathcal{G}(n,p)$ la variable aleatòria $X_\triangle$ que compta el nombre de triangles de $\mathcal{G}(n,p)$. Aleshores:*

- *Si np tendeix a 0, aleshores $\Pr(X_\triangle = 0)$ tendeix a 1 quan n tendeix a infinit (diem que $X_\triangle = 0$ asimptòticament gairebé arreu).*
- *Si np tendeix a $c \neq 0$, aleshores, quan n tendeix a infinit, $X_\triangle$ s'aproxima a una distribució de tipus Poisson amb paràmetre $c^3/6$.*
- *Si np tendeix a infinit, aleshores tenim un teorema de límit central per a $X_\triangle$:*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_\triangle - \mathbb{E}[X_\triangle]}{\mathbb{V}\mathrm{ar}[X_\triangle]^{1/2}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1),$$
on la convergència aquí es considera en distribució.

Una conclusió important que traiem d'aquest exemple és la següent: si considerem l'evolució del paràmetre p començant en 0 i acabant en 1, aleshores en el punt $p = 1/n$ passem de no tenir mai triangles a tenir-ne sempre (amb el benentès que, quan agafem una probabilitat en la finestra d'aquest punt, a saber $p = c/n$, on c és constant, apareixen de tant en tant (no sempre) triangles seguint una distribució de Poisson). Aquest fenomen no només apareix quan estudiem l'existència d'altres subgrafs, sinó també quan estudiem altres tipus de propietats. Amb més precisió, diem que una *propietat de grafs $\mathcal{P}$* és un subconjunt de grafs (per exemple, la propietat «contenir un triangle» l'entenem com la família de grafs que contenen un triangle). Amb això, la pregunta és: quant val, per a una propietat donada, $\Pr(\mathcal{G}(n,p) \in \mathcal{P})$?

La resposta a aquesta pregunta és coneguda per a una classe de propietats ben àmplia i quan n tendeix a infinit. Direm que una classe de grafs $\mathcal{P}$ és *monòtona creixent* sempre que G_1 i G_2 són grafs tals que G_1 és subgraf de G_2 i $G_1 \in \mathcal{P}$, aleshores $G_2 \in \mathcal{P}$. De manera similar, podríem definir la propietat de ser monòtona decreixent. Per exemple, contenir un triangle, tenir un camí de longitud n o ser un graf connex són propietats monòtones creixents en grafs, mentre que, per exemple, ser planar o ser bipartit és una propietat monòtona decreixent. Finalment, la propietat de tenir un nombre parell d'arestes no és ni creixent ni decreixent.

El gran resultat (amb una prova gens difícil i molt astuta per altra banda!) de Béla Bollobás i Andrew Thomason (vegeu la prova a [5]) ens diu que el que hem observat en l'existència (o no) de triangles passa en totes les propietats monòtones. Amb més precisió, si $\mathcal{P}$ és una propietat monòtona creixent, aleshores existeix una probabilitat p^* per la qual

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\mathcal{G}(n,p) \in \mathcal{P}) = \begin{cases} 0, & p = o(p^*), \\ 1, & p^* = o(p). \end{cases}$$

Així doncs, per a propietats monòtones hi ha un salt en el comportament, i es passa de 0 a 1 quan travessem un valor de la probabilitat llindar p^* que només depèn de $\mathcal{P}$. En el cas de la propietat de contenir triangles, per exemple, hem vist que aquest valor de p^* és igual a $\frac{1}{n}$.

En aquest context, possiblement el primer i més gran resultat en la teoria dels grafs aleatoris és en el segon treball d'Erdős i Rényi sobre el tema, on la propietat clau que estudien és la connectivitat (vegeu [13]). En aquest cas, la connectivitat és una propietat monòtona creixent, i, per tant, té un llindar. L'anàlisi és més complicada que en el cas dels triangles: amb una mica de feina i usant estimacions per al primer i el segon moments hom obté (vegeu, per exemple, [15]) que la funció llindar per a aquesta propietat és $p^* = \frac{\log(n)}{n}$.

El resultat fonamental de la teoria no és aquest llindar per a la connectivitat, sinó l'aspecte qualitatiu del graf $\mathcal{G}(n,p)$ una mica abans d'arribar a l'escala del llindar: al voltant de $p = \frac{1}{n}$. L'aspecte evolutiu del graf $\mathcal{G}(n,p)$ és el següent, anomenat de vegades com el *naixement de la component gegant*, o també *fenomen de salt doble*:

Teorema 6 (Erdős-Rényi, 1960). *En relació amn el graf $\mathcal{G}(n,p)$ i per a n prou gran,*

- *quan $p = \frac{1}{n} - \frac{\mu}{n^{4/3}}$, amb μ constant positiva: la seva component connexa més gran té de mida $\alpha \log(n) + o(\log(n))$, on α depèn de μ;*
- *quan $p = \frac{1}{n}$, la seva component connexa més gran té mida $\beta\, n^{2/3} + o(n^{2/3})$, per a un cert valor de β;*
- *quan $p = \frac{1}{n} + \frac{\mu}{n^{4/3}}$, amb μ constant positiva: la component connexa més gran passa a tenir mida lineal $\gamma\, n + o(n)$, on $\gamma < 1$ depèn de μ,*

on totes les afirmacions es prenen amb probabilitat 1 quan n tendeix a infinit.

El resultat important és, doncs, que en un lapse evolutiu molt curt (quan passem d'una probabilitat lleugerament inferior a $p = \frac{1}{n}$ a una probabilitat lleugerament superior) l'aspecte qualitatiu del graf $\mathcal{G}(n,p)$ canvia significativament: la component més grossa passa de ser petita (mida logarítmica), a ser primer de mida $n^{2/3}$ ($\mu = 0$) i després de mida lineal. Aquest resultat inicia l'estudi sistemàtic dels anomenats *fenòmens de transició de fase en estructures discretes*, i amb gran interacció amb els sistemes físics discrets. Un exemple ben representatiu d'aquests fenòmens (però no l'únic; la física estadística n'està ple!) és la transformació de l'aigua de glaç a líquid en una finestra molt estreta al voltant de la temperatura de 0 graus: una petita variació al voltant d'aquesta temperatura fa canviar de manera significativa l'aspecte qualitatiu de l'aigua, que passa d'estat sòlid a estat líquid.

4.1 Més enllà del model $\mathcal{G}(n, p)$

Els models $\mathcal{G}(n, p)$ i $\mathcal{G}(n, m)$ van iniciar tota la branca dels grafs aleatoris, que s'ha mantingut activa fins avui dia. Però, malgrat que aquests models (els favorits per als que ens dediquem a la combinatòria i la matemàtica discreta) tenen interès per si mateixos i són molt simples d'analitzar (independència per a la tria d'arestes), la realitat és que, com a models reals, manquen de certs aspectes que s'observen en les grans xarxes. O, dit d'una altra manera, existeixen propietats que comparteixen moltes de les grans xarxes reals que no s'observen en aquests models.

Potser la propietat més important en aquest aspecte és el fenomen d'*invariància d'escala* (*scale-free* en anglès). De manera experimental, el que s'observa en les xarxes reals (Internet, etc.) és que la distribució de graus dels vèrtexs té un decreixement que segueix una llei polinomial (el que anomenem *cua pesada*). En el cas del graf $\mathcal{G}(n, p)$, la fotografia és completament diferent: en aquesta situació la distribució de graus decreix de manera exponencial i no polinomial. Aquest fet té la conseqüència següent: el model $\mathcal{G}(n, p)$ és un model molt uniforme, en què el valor esperat de veïns d'un vèrtex donat sempre serà el mateix ($p(n-1)$, amb independència de com triem el vèrtex). Per contra, en els models invariants per canvis d'escala s'observa un fenomen ben diferent: en tenir una distribució amb cues pesades, serà molt probable que apareguin uns pocs vèrtexs amb una alta connectivitat (és a dir, amb un grau elevat). Això és precisament el que s'observa en les grans xarxes complexes: en la xarxa Internet hi ha nodes (els *concentradors*) que reben moltes més connexions que la resta; en les xarxes socials hi ha individus que tenen moltíssims coneguts, etc.

L'existència de concentradors molt ben connectats amb d'altres fa que aquest tipus de xarxes satisfacin un fenomen de petit món: vèrtexs de grau elevat connectats entre ells faran que molts vèrtexs estiguin a poca distància. D'aquesta manera el camí més curt entre dos vèrtexs qualssevol és molt petit en relació amb la mida del sistema. Aquesta noció es va introduir a la cultura popular per l'experiment de «sis graus de separació» de Stanley Milgram als anys seixanta, en què va quedar clar que els subjectes podien lliurar un paquet a un desconegut a l'altre costat dels Estats Units, utilitzant només contactes personals i en un nombre petit de pasos.

Complementàriament a l'aparició de vèrtexs amb grau elevat, el que també s'observa en les xarxes reals és un fenomen que no ocorre en el model $\mathcal{G}(n, p)$: l'aparició de conjunts de vèrtexs connectats dos a dos entre ells, fenomen anomenat *clusterització*. Per exemple, quan hom examina xarxes socials, observa que hi ha grups de persones que es coneixen mútuament entre elles. Combinar aquestes dues propietats (existència de concentradors, existència de clusterització) és una tasca difícil. Per exemple, en el model ben paradigmàtic introduït per Duncan Watts i Steven Strogatz l'any 1998 a [35], tenim l'existència de clústers, però no de concentradors (vegeu també, per exemple, [1]). Molta recerca activa i interessant actual va en aquesta direcció, en què es combinen moltes àrees del coneixement, incloent-hi la física teòria i les matemàtiques més fonamentals.

5 La pseudoaleatorietat en teoria de grafs

Tornem al paradigma amb el qual hem iniciat el pensament probabilístic en grafs. Sabem que existeixen grafs amb nombre cromàtic i coll tan gran com desitgem, ja que al graf aleatori $\mathcal{G}(n,p)$ (per una tria de p adequada) aquesta afirmació és certa amb probabilitat 1. Ara bé, trobar-ne un d'*explícit* pot ser una tasca descoratjadora: dins del mar immens de grafs amb n vèrtexs (recordem que n és gran), és com intentar buscar una agulla en un paller. Com podem fer-ho de manera efectiva?

Una estratègia que podria tenir sentit és intentar identificar grafs que, malgrat ser ben deterministes, es comportin tal com si fossin grafs aleatoris. Si és així, hom esperarà que un tal graf determinista sigui ben regular, i que puguem tenir un bon control dels paràmetres, tal com passava en el model $\mathcal{G}(n,p)$. Aquesta noció, la de modelar objectes no aleatoris deterministes com si ho fossin, és un paradigma de gran importància en matemàtiques, com per exemple en la generació de números aleatoris. Aquesta és la noció de pseudoaleatori que descriurem tot seguit.

En el nostre context cal trobar la noció correcta del que entenem per *graf pseudoaleatori*. Començarem amb la terminologia introduïda per Andrew Thomasson l'any 1987 a [34]. Sigui $G = (V,A)$ un graf amb n vèrtexs. Prenem $p \in [0,1]$ i ε un paràmetre (que pot dependre, per exemple, de n; típicament no ho farà). Direm ara que G és (p,ε_1)-*embolicat* (de l'anglès *jumbled*) si per a tot subconjunt de vèrtexs $U \subseteq V$ es compleix que

$$\left| e(U) - p\binom{|U|}{2} \right| < \varepsilon_1 |U|,$$

on $e(U)$ és el nombre d'arestes que tenen els dos extrems en U. Aquesta definició ens diu el següent: si pensem en el model $\mathcal{G}(n,p)$, i prenem $U \subseteq V$, aleshores $e(U)$ és una variable aleatòria que té esperança igual a $p\binom{|U|}{2}$. De fet, $e(U)$ és una suma de $\binom{|U|}{2}$ variables aleatòries independents de tipus Bernoulli. Aplicant la desigualtat de Chernoff per a la suma de variables indicadores independents (vegeu, per exemple, [7]), podem concloure fàcilment que, amb probabilitat tendint a 1, $\mathcal{G}(n,p)$ és un graf $(p, O(\sqrt{np}))$-embolicat.

Quines propietats esperem que es compleixin en el model $\mathcal{G}(n,p)$ i que voldríem que es traduïssin en grafs deterministes? En tenim unes quantes, de fet. Per exemple, per a un graf donat H amb $v(H)$ vèrtexs i $e(H)$ arestes, el nombre esperat de subgrafs de $\mathcal{G}(n,p)$ iguals a H és $C_H n^{v(H)} p^{e(H)}(1+o(1))$, on C_H és una constant que només depèn de H (el càlcul es fa igual que en el cas dels triangles; aquí la constant C_H depèn del nombre d'automorfismes de H). Bé, doncs en el cas pseudoaleatori, el que estaríem demanant és el següent: sigui $G=(V,A)$ un graf amb n vèrtexs i H el subgraf que volem estudiar. Tot denotant amb $c_H(G)$ el nombre de subgrafs de G iguals a H, voldríem que existissin uns valors $\varepsilon_{2,H}>0$ i $p>0$ per als quals

$$|c_H(G) - C_H n^{v(H)} p^{e(H)}| < \varepsilon_{2,H} n^{v(H)}. \tag{S2}$$

Dit d'una altra manera, perquè el nostre graf G s'assembli al graf aleatori $\mathcal{G}(n,p)$, caldrà que per a tot graf H més petit, el nombre $c_H(G)$ sigui aproximadament igual a $C_H n^{v(H)} p^{e(H)}$. En particular, aquesta condició hauria de ser certa si prenem com a subgraf H el cicle de longitud 4, que té quatre vèrtexs i quatre arestes. Si el denotem amb C_4, el que voldríem és que

$$|c_{C_4}(G) - C_{H_4}(np)^4| < \varepsilon_{2,C_4} n^4, \tag{S3}$$

per a un cert paràmetre ε_{2,C_4}. Aquestes possibles nocions que hem donat de pseudoaleatorietat poden resultar complicades de comprovar, ja que ens caldria verificar quantes còpies de subgrafs tenim, o comprovar quantes arestes tenim entre parelles de conjunts de vèrtexs. Si volem donar una noció més local, podem intentar usar el *cograu* de parelles de vèrtexs, definit com el nombre de vèrtexs adjacents a dos vèrtexs donats. Amb més precisió, si tenim $u,v\in V$ per a un graf $G=(V,A)$ i denotem amb $\mathrm{cogr}(u,v)$ el seu cograu, en el model $\mathcal{G}(n,p)$ tindrem que, per a una parella qualsevol de vèrtexs u, v, $\mathbb{E}[\mathrm{cogr}(u,v)] = p^2 n(1+o(1))$. Si volem relaxar aquesta condició en el cas determinista, el que desitjarem és que de mitjana no hi hagi gaire desviació respecte a $p^2 n$, o, dit d'una altra manera, voldríem que

$$\sum_{u,v\in\binom{V}{2}} |\mathrm{cogr}(u,v) - p^2 n| < \varepsilon_4 n^3,$$

on p i ε_4 són paràmetres positius. Comprovar aquesta propietat, per a un graf donat, és molt més senzill, perquè només requereix investigar per a cada cada parella de vèrtexs el nombre de veïns comuns.

Presentades totes aquestes possibles definicions de graf pseudoaleatori, quina és la bona definició? Bé: ho són totes: en un treball molt pioner de Fan Chung, Ron Graham i Richard M. Wilson de l'any 1989 (vegeu [8]), els autors demostren que totes aquestes condicions (i, de fet, alguna més que no mencionem aquí) són totes (essencialment) equivalents, i només hi ha una dependència polinomial entre les diferents ε_i. Possiblement el més rellevant d'aquest teorema és que la condició (S3) és igual de forta que la condició (S2): el control del nombre de cicles de longitud 4 (que *a priori* sembla una condició molt més dèbil) dona lloc a tota la resta de les condicions, i, per tant, el nombre de còpies C_4 en un graf determina si aquest s'assembla poc o molt al $\mathcal{G}(n,p)$. Finalment, en la terminologia de l'àrea, es diu que una seqüència de grafs $\{G_n\}_{n\geq 1}$ amb $G_n = (V_n, A_n)$ i $\lim_n |V_n| = \infty$ és *quasialeatòria* si compleix (per a ε_i fixades) una de les propietats esmentades, i, per tant, totes elles. Si és així, les condicions poden escriure's en termes de la notació o petita. Per exemple, la condició (S3) aquí s'escriuria com

$$c_{C_4}(G_n) = C_{H_4}(np)^4(1+o(1)).$$

5.1 El lema de regularitat de Szemerédi i conseqüències

Una de les aplicacions més importants d'aquesta dicotomia que existeix entre l'aleatorietat i el determinisme és una de les tècniques més potents i eficaces de la combinatòria: estem parlant del lema de regularitat de Szemerédi. Aquest lema, de natura tècnica, va ser desenvolupat per Endre Szemerédi en el curs de la seva prova de l'anomenada *conjectura d'Erdős-Turán per a progressions aritmètiques* (vegeu [32]), resultat cabdal de la teoria combinatòria de nombres que afirma que tot conjunt de mesura positiva en els enters positius conté progressions aritmètiques de longitud tan llarga com vulguem. Szemerédi, de fet, en la seva resolució de la conjectura (vegeu la figura 10, on es mostra el diagrama de flux de la prova), va desenvolupar una sèrie de tècniques per a grafs bipartits que van ser generalitzades a [33] per a grafs generals, en el mode que entenem avui en dia el lema de regularitat.

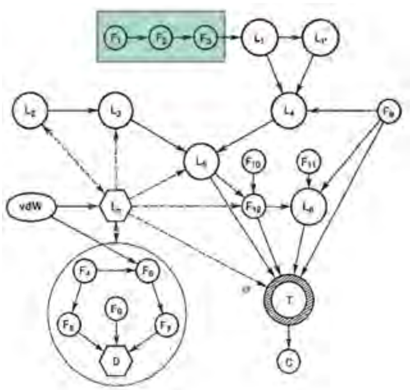

FIGURA 10: Esquema de l'estructura de la prova del teorema de Szemerédi, extreta de [33]. Les afirmacions $F_1 - F_2 - F_3$ són el germen del futur lema de regularitat.

Per a formular i entendre aquest resultat, ens cal introduir algunes definicions que segueixen l'esperit de la noció de quasialeatorietat. Considerem ara dos conjunts de vèrtexs disjunts V_1 i V_2 i el graf $G = (V, A)$ amb vèrtexs $V = V_1 \cup V_2$, en què les arestes tenen un extrem en V_1 i un altre en V_2. Les arestes, a més, les triem independentment amb probabilitat p. El graf que definim és molt semblant al $\mathcal{G}(n,p)$, amb la diferència que ara el que obtenim és un graf bipartit. Si ara considerem la variable aleatòria X que compta el nombre d'arestes, aleshores, per la linealitat de l'esperança, és clar que $\mathbb{E}[X] = p|V_1||V_2|$. Dit d'una altra manera,

$$p = \frac{\mathbb{E}[X]}{|V_1||V_2|}.$$

En aquest model, tenim, doncs, que per a tota parella de subconjunts $W_1 \subseteq V_1$ i $W_2 \subseteq V_2$

$$d(W_1, W_2) := \frac{e(W_1, W_2)}{|W_1||W_2|} = p,$$

on $e(W_1, W_2) = |\{\overline{w_1 w_2} \in A : w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}|$ és el nombre d'arestes que tenen un extrem en un vèrtex de W_1 i l'altre en un vèrtex de W_2, i $d(W_1, W_2)$ és la densitat d'arestes entre W_1 i W_2.

Com podem traduir aquesta condició al cas determinista? Fixem ara un paràmetre ε (associat a l'error que volem permetre) i considerem un graf G determinista, amb una partició dels vèrtexs com abans: $V = V_1 \cup V_2$. Direm que G és *ε-regular* si per a qualsevol subconjunt de vèrtexs $W_1 \subseteq V_1$ i $W_2 \subseteq V_2$ prou grans, és a dir, $|W_i| \geq \varepsilon|V_i|$ per a $i = 1, 2$, aleshores tenim que

$$|d(W_1, W_2) - d(V_1, V_2)| < \varepsilon.$$

Estem dient, doncs, que la ε-regularitat fa que un graf determinista sigui molt regular, amb propietats similars a les del graf aleatori bipartit. Observem que en la definició de ε-regular no ens preocupem si tenim arestes definides per dos vèrtexs de V_1 (o de V_2). Això no importa: l'important aquí són només les arestes amb extrems en els dos conjunts mencionats.

Ara podem ampliar aquesta noció a grafs més generals que els bipartits. De nou fixem un paràmetre de tolerància $\varepsilon > 0$. Donat un graf $G = (V, A)$, direm que admet una *partició ε-regular* si podem trobar una partició del conjunt de vèrtexs $V = V_0 \cup \cdots \cup V_r$ tal que:

1. $|V_0| < \varepsilon|V|$.
2. $|V_1| = \cdots = |V_r|$.
3. Totes les parelles $\{V_i, V_j\}$, $i \neq j$, defineixen un graf ε-regular excepte εr^2 d'elles.

El que ens està dient aquesta definició és que en una partició ε-regular tenim un conjunt excepcional V_0 que serà petit i on ficarem vèrtexs «tòxics» (que trenquin, per exemple, la condició de regularitat, o que tinguin un grau massa petit, per exemple). Després, que la resta de vèrtexs es poden agrupar en conjunts de vèrtexs que definiran, en la majoria de casos, parelles ε-regulars. En realitat, l'important en una tal partició són les arestes entre els vèrtexs de conjunts V_i i V_j diferents: en cap cas no ens preocuparem del que passa amb les arestes definides per parelles de vèrtexs dins d'un mateix conjunt V_i.

Una tal descomposició sempre existeix si prenem, per exemple, cada conjunt V_i de mida 1, però és clar: una partició com aquesta té poca gràcia. El que voldríem és poder assegurar que en una tal partició els conjunts V_i són grans, defineixen poques parelles ε-regulars però amb moltes arestes. Per a grafs prou grans aquestes particions *sempre* existeixen. Aquest és el contingut del lema de regularitat de Szemerédi:

LEMA 7 (LEMA DE REGULARITAT DE SZEMERÉDI, 1978). *Sigui $\varepsilon > 0$ i m un valor enter no negatiu. Aleshores existeix una constant $M := M(\varepsilon, m)$ tal que tot graf amb més de m vèrtexs té una partició ε-regular amb parts $V_0, \ldots, V_r$ on $m \leq r \leq M$.*

Aquest lema ens diu el següent: si prenem una tolerància petita i una mida fixada m, aleshores tot graf prou gran admet una partició en una part quasialeatòria (les arestes definides per les parelles ε-regulars) i una part estructurada (tot el que no podem controlar amb la ε-regularitat). I, és clar, la part quasialeatòria té una contribució important, degut al fet que el nombre de conjunts V_i està fitat. Filosòficament, aquest lema ens diu una cosa ben profunda: essencialment afirma que tot graf prou gran es pot pensar com si l'haguéssim generat, essencialment, amb un procediment aleatori! I, per tant, malgrat estar treballant amb grafs deterministes podem usar tècniques procedents del pensament probabilístic. Tot i així, cal fer dos comentaris importants:

1. El lema de regularitat tal com l'hem formulat és efectiu quan el graf és *dens*, és a dir, quan té un nombre quadràtic d'arestes en termes del nombre de vèrtexs. Si el graf no és dens, el lema de regularitat no dona cap resultat que sigui interessant perquè la tolerància elimina tota la informació rellevant de la partició. En tot cas, hi ha versions més refinades (i complicades) per a grafs no densos. Vegeu, per exemple, [21].
2. El nombre de particions que dona el lema de regularitat (la constant M del lema) és immens. Tal com es veu de la prova del lema (basada en un algorisme en què a cada pas refinem la partició anterior fins que s'arriba a una partició ε-regular; l'algorisme acaba perquè altrament s'arribaria a una contradicció), M té l'ordre de magnitud d'una torre d'exponencials d'altura $O(\varepsilon^{-5})$ amb base m. Per tant, realment la mida dels nostres grafs ha de ser gegantina. De fet, també se sap que el lema de regularitat no millora aquesta fita: Gowers a [18] demostra que existeixen grafs en què el nombre d'elements en la partició és de l'ordre d'una torre exponencial d'altura $O(\varepsilon^{-1/16})$ i base m.

El lema de regularitat ens permet «representar» el nostre graf gegant per tal de poder-lo estudiar de manera molt senzilla. Per tant, cal entendre el lema com una preparació de la nostra estructura que ens permetrà treure'n conclusions. De fet, aquesta preparació del graf per a poder-ne dir coses més endavant típicament es dona mitjançant la prova primer d'un lema enumeratiu, que serà després el que s'emprarà per a les aplicacions.

La primera aplicació del lema de regularitat de Szemerédi (més enllà de la que apareix en la prova de la conjectura d'Erdős-Turán) és el següent lema degut a Imre Ruzsa i Endre Szemerédi [29], anomenat *teorema (6,3)* o *lema eliminador de triangles* i que té com a conseqüència, per exemple, la resolució de la conjectura d'Erdős-Turán per al cas de progressions aritmètiques de longitud 3. Aquest resultat és l'anomenat *teorema de Roth*, resultat demostrat per Klaus Roth l'any 1953 mitjançant tècniques analítiques (vegeu [28]) i pel qual, en part, va rebre la medalla Fields l'any 1958.

Lema 8 (Ruzsa-Szemerédi, 1978). *Sigui $\varepsilon > 0$. Aleshores existeix una constant $\delta := \delta(\varepsilon)$ de tal manera que tot graf en n vèrtexs que conté més de δn^3 triangles pot fer-se lliure de triangles eliminant com a màxim εn^2 arestes.*

Aquest resultat, demostrat l'any 1978, ens diu el següent: si tenim un graf molt gran amb pocs triangles (aquí per «molts» entenem δn^3 triangles), aleshores, tot eliminant una petita proporció de les arestes (i, per tant, no destruint per complet el nostre graf), podem continuar tenint un graf no buit però aquest cop lliure de triangles. Hem eliminat tots els triangles sense destruir el graf. Veurem la prova, però prèviament ens caldrà demostrar el següent lema, que permet comptar triangles en ternes regulars:

Lema 9 (Lema comptador de triangles). *Sigui $G = (V, A)$ un graf amb partició de vèrtexs $V = X \cup Y \cup Z$. Suposem que $d(X, Y) = \alpha$, $d(X, Z) = \beta$, $d(Y, Z) = \gamma$. Sigui $\varepsilon > 0$ tal que $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \geq 2\varepsilon$. Finalment, assumim que totes les parelles $\{X, Y\}$, $\{Y, Z\}$ i $\{X, Z\}$ són ε-regulars.*

Aleshores, el nombre de triangles de la forma $\triangle xyz$, on $x \in X$, $y \in Y$ i $z \in Z$, és, com a mínim,

$$(1 - 2\varepsilon)(\alpha - \varepsilon)(\beta - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|X||Y||Z|.$$

Prova. Fixem un vèrtex $x \in X$. Sigui $N(x)$ el conjunt de veïns de x i $\mathrm{gr}_Y(x)$, $\mathrm{gr}_Z(x)$ el nombre de veïns de x en Y i en Z, respectivament.

Començarem veient que podem controlar el nombre de vèrtexs en X amb grau petit. Demostrem primer que

$$|\{x \in X : \mathrm{gr}_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\}| < \varepsilon|X|.$$

Assumim el contrari, és a dir: $|\{x \in X : \mathrm{gr}_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\}| \geq \varepsilon|X|$. Per simplicitat, escrivim $\{x \in X : \mathrm{gr}_Y(x) < (\alpha - \varepsilon)|Y|\} = X'$. Aleshores $|X'| \geq \varepsilon|X|$. Per definició de parella ε-regular, $|d(X', Y) - d(X, Y)| < \varepsilon$. Com que $d(X, Y) = \alpha$ i $d(X', Y) < \alpha - \varepsilon$ (observeu que cada vèrtex x de X' contribueix en com a màxim $(\alpha - \varepsilon)|Y|$ arestes), concloem que

$$d(X', Y) - d(X, Y) < \alpha - \varepsilon - \alpha < -\varepsilon,$$

que és una contradicció amb el fet que $|d(X', Y) - d(X, Y)| < \varepsilon$. És clar que el mateix argument funciona prenent Z en lloc de Y. Per tant, hem arribat a la conclusió que

$$|\{x \in X : \mathrm{gr}_Y(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Y| \quad \text{i} \quad \mathrm{gr}_Z(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Z|\}| \geq (1 - 2\varepsilon)|X|.$$

Mirem ara el nombre de triangles en què apareix x. Tenim que $|N(x) \cap Y| = \mathrm{gr}_Y(x) \geq (\alpha - \varepsilon)|Y| \geq \varepsilon|Y|$ i $|N(x) \cap Z| = \mathrm{gr}_Z(x) \geq (\gamma - \varepsilon)|Z| \geq \varepsilon|Z|$. (Recordeu que assumim que $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \geq 2\varepsilon$.) De nou, per la condició de ε-regularitat tenim que

$$|d(Y,Z) - d(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)| < \varepsilon \Longrightarrow \gamma - \frac{e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)}{|N(x) \cap Y||N(x) \cap Z|} < \varepsilon.$$

Per tant, hem arribat a la conclusió que $e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z) > (\alpha - \varepsilon)(\gamma - \varepsilon)|Y||Z|$. Cadascuna de les arestes d'aquest conjunt defineix un triangle en què estem usant el vèrtex $x \in X$. Així doncs, el nombre de triangles és com a mínim el nombre de triangles en què $x \in X$ satisfà la condició indicada, que és com a mínim $(1 - 2\varepsilon)|X|e(N(x) \cap Y, N(x) \cap Z)$. □

Un cop feta la prova, és bo mirar la figura 11, on apareixen tots els ingredients de la prova.

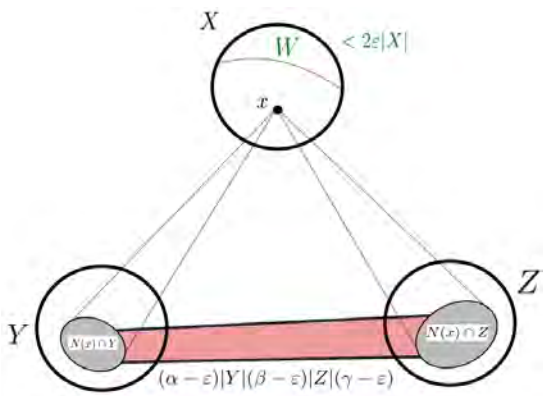

FIGURA 11: Un esquema simplificat de la prova del lema comptador de triangles.

Ja amb aquest lema podem passar a demostrar el lema eliminador de triangles. A la prova gastarem el lema comptador sobre una partició ε-regular del nostre graf.

PROVA DEL LEMA 8 (ELIMINADOR DE TRIANGLES). Per demostrar el lema eliminador de triangles, de fet el que farem serà demostrar la implicació contrària: si ens cal eliminar com a mínim εn^2 arestes de G per a obtenir un graf lliure de triangles, aleshores això és perquè hem començat a partir d'un graf amb més de δn^3 triangles.

Prenguem $\varepsilon > 0$, i definim $m = \lfloor \frac{4}{\varepsilon} \rfloor$. Considerem aleshores una partició $\frac{\varepsilon}{4}$-regular de G amb parts $V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k$. Per conveniència, fem $c = |V_1| = \cdots = |V_k|$. Observeu ara que $\lfloor \frac{4}{\varepsilon} \rfloor < k$, i que $kc < n$ (en aquesta darrera desigualtat no estem sumant els vèrtexs de V_0, amb $|V_0| \leq \frac{\varepsilon}{4} n$).

Començarem eliminant unes poques arestes de G:

i) Totes les arestes que són adjacents amb V_0 (internes o externes a V_0): en tenim com a màxim $|V_0|n = \frac{\varepsilon}{4}n^2$.

ii) Totes les arestes íntegrament contingudes en $V_1, \ldots, V_k$: en tenim com a màxim $k\binom{c}{2} < kc^2 < \frac{n^2}{k} < \frac{\varepsilon}{4}n^2$.

iii) Totes les arestes definides per les parelles $\{V_i, V_j\}$ $(1 \le i < j \le k)$ que no són $\frac{\varepsilon}{4}$-regulars: recordeu que tenim com a màxim $\frac{\varepsilon}{4}k^2$ parelles d'aquest tipus. Per tant, com a màxim tindrem $\frac{\varepsilon}{4}k^2c^2 < \frac{\varepsilon}{4}n^2$ arestes.

iv) Totes les arestes entre parelles $\frac{\varepsilon}{4}$-regular $\{V_i, V_j\}$, on $d = d(V_i, V_j) < \frac{\varepsilon}{2}$. En aquesta situació tindrem com a màxim $\binom{k}{2}$ parelles d'aquesta mena, i, per tant, el nombre d'arestes estarà fitat per $\binom{k}{2}d(V_i, V_j)|V_i||V_j| < \frac{k^2}{2}\frac{\varepsilon}{2}c^2 < \frac{\varepsilon}{4}n^2$.

Resumint, sumant les contribucions des de i) fins a iv), el que haurem fet és eliminar com a màxim εn^2 arestes. En aquest punt, si el graf que hem obtingut és lliure de triangles, ja hem acabat. Si no és així, això vol dir que encara queden triangles en el nostre graf, i que, per tant, ens cal eliminar unes arestes més per fer-lo lliure de triangles. Quines són les arestes que han sobresviscut? Bé: només les definides per parelles $\frac{\varepsilon}{4}$-regulars amb una densitat superior o igual a $\frac{\varepsilon}{2}$. Prenem, doncs, tres parelles qualssevol (per a fixar notació, suposem que per als conjunts V_i, V_j i V_k). Observeu ara que les condicions del lema comptador de triangles se satisfan prenent $\varepsilon/4$ a l'enunciat en lloc de ε, a saber:

- $d(V_i, V_j) = \alpha$, $d(V_j, V_k) = \beta$ $d(V_i, V_k) = \gamma$, i $\min\{\alpha, \beta, \gamma\} \ge \frac{\varepsilon}{2}$.
- Cada parella és $\frac{\varepsilon}{4}$-regular.

Per tant, ara pel lema comptador de triangles, aquests tres conjunts de vèrtexs defineixen com a mínim $(1 - \frac{\varepsilon}{2})(\frac{\varepsilon}{4})^4c^3$ triangles. Aquesta fita pot escriure's en termes de n: com que $n = |V_0| + kn$, $|V_0| \le \frac{\varepsilon}{4}n$ i $k \le M(m, \frac{\varepsilon}{4}) := M(\varepsilon)$, tindrem, doncs, que

$$n = |V_0| + ck \Longrightarrow c > \frac{1}{k}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)n > \frac{1}{M(\varepsilon)}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)n,$$

i, consegüentment, el nombre de triangles definits en aquest cas seran com a mínim

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 \frac{1}{M(\varepsilon)^3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^3 n^3.$$

Finalment, triant ara

$$\delta = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 \frac{1}{M(\varepsilon)^3}\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^3$$

tenim el resultat que volíem demostrar: si no eliminem tots els triangles tot eliminant εn^2 arestes, aleshores estàvem partint d'un graf amb més de δn^3 triangles. □

Voldríem fer dos comentaris generals després d'haver demostrat aquest lema. El primer és que totes les dependències entre paràmetres en el lema eliminador de triangles són les que sorgeixen del lema de regularitat de Szemerédi. Ara bé, el lema eliminador de triangles pot demostrar-se independentment del lema de regularitat, donant lloc a millors dependències entre els paràmetres (vegeu el treball de Fox [14] publicat a *Annals of Mathematics*). El segon comentari és que el lema eliminador de triangles pot estendre's de manera senzilla a altres subgrafs: això pot fer-se sempre, ja que podem demostrar, usant les mateixes idees que hem desenvolupat, lemes comptadors per a subgrafs qualssevol.

6 Objectes límit en grafs i grans xarxes

Per tal de parlar de límits de grafs és millor començar fent un símil de números racionals i de números reals. El que primer aprenem quan ens iniciem en l'aritmètica són els números enters positius, després els negatius i finalment els números racionals. Per a fer el salt als números reals ens cal una mica més: ens cal completar els «forats» existents entre els números racionals perquè, en particular, tota successió de Cauchy sigui convergent. La motivació és clara: volem treballar en espais on puguem assegurar l'existència de límits, o, si més no, de parcials convergents. Volem que en les estructures matemàtiques amb què treballem no tinguem forats.

Aquest fenomen de pas al límit d'estructures discretes a objectes continus (com ja passa en fer el pas dels números racionals als números reals) és freqüent en matemàtiques, i en particular en matemàtica discreta: els matemàtics discrets utilitzen eines de la matemàtica contínua i, en sentit contrari, els matemàtics continus utilitzen tècniques de discretització. Un exemple ben conegut és el clàssic teorema de De Moivre-Laplace en probabilitat, que defineix el límit de variables aleatòries discretes binomials independents en termes de la llei normal (que és un objecte eminentment continu). Un altre bon exemple elemental són les sumes de Riemann, que, sota condicions tècniques, convergeixen cap a la integral.

Aquesta idea de pas al límit (alguns cops per necessitat de completesa, d'altres per a donar un marc de treball prou ampli i general), com no podria ser d'una altra manera, també impregna el món dels grafs. Els objectes clau en la teoria dels grafs límits són els anomenats *grafons*, nom que prové de la contracció de *graf* i de *funció*. Un grafó és simplement una funció $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ mesurable (en el sentit de Lebesgue) i simètrica. Entenem aquí per simètrica si es compleix que $W(x,y) = W(y,x)$. De fet, quedem-nos aquí amb aquesta idea: més endavant redefinirem què és un grafó (ja que d'aquí a una estona ens trobarem problemes tècnics que haurem de resoldre).

Els grafons els dibuixarem en el pla de manera semblant als codis QR: per a cada píxel del pla li associarem un valor en l'interval $[0,1]$, i per representar-ho pintarem el corresponent píxel de color negre o de color blanc segons si la funció pren el valor 1 o 0. De fet, si el valor de la funció en el punt considerat és $p \in (0,1)$, el pintarem de gris, més o menys intens segons com de gran sigui aquest valor.

Què són grafons? Per exemple, a cada graf G li podem associar un grafó com segueix: si els vèrtexs de G estan etiquetats amb etiquetes des d'1 fins a n, aleshores definim el seu grafó associat $W_G\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ partint primer l'interval $[0,1]$ en n intervals d'igual longitud $I_1, \ldots, I_n$ i establint que el rectangle $I_r \times I_s$ prendrà valor 1 o 0 segons si hi ha una aresta (o no) entre els vèrtexs r i s. Si recordem que, donat un graf $G = (V, A)$ amb una ordenació dels vèrtexs $\{v_1, \ldots, v_n\}$, la matriu d'adjacència de G és una matriu simètrica, amb entrades 0 i 1 de tal manera que l'entrada en la fila i i la posició j és 1 si i només si v_i i v_j estan units per una aresta, el que estem fent és, primer, escriure la matriu d'adjacència del graf G i, segon, substituir la matriu per una imatge pixelada en blanc i negre: posem un color negre o blanc segons si els coeficients de la matriu són 1 o 0, respectivament. A la figura 12 mostrem un exemple explícit de la construcció del grafó associat a un graf donat per un graf bipartit amb $2n = 12$ vèrtexs.

FIGURA 12: Un graf bipartit, la seva matriu d'adjacència i el seu grafó corresponent.

En general, podem construir una seqüència de grafs bipartits que repliquin la seva estructura (és a dir: una seqüència de grafs amb $n+n$ vèrtexs, en què el vèrtex amb etiqueta 1 té grau n, el vèrtex amb etiqueta 2 està connectat als vèrtexs amb etiqueta $n+2, n+3, \ldots, 2n$, etc.), i és natural preguntar-se quin serà el límit corresponent en termes de grafons. En aquest cas, podem pensar en termes de la convergència puntual de grafons; el límit serà el grafó amb un dibuix com el següent, que no es correspon clarament a cap grafó procedent d'un graf.

FIGURA 13: Límit de la seqüència de grafons definida en la figura 12.

Vegem-ne un segon exemple. Hom podria pensar que només caldria restringir-nos a funcions mesurables en $[0,1]^2$ que prenguin valors en $\{0,1\}$. Però això no és així: si ara fixem $p = 1/2$ i considerem la seqüència de grafs $\mathcal{G}(n,p)$ (o una seqüència de grafs quasialeatoris amb paràmetre $p = 1/2$, que al final és un procediment explícit per a modelar l'objecte $\mathcal{G}(n,p)$), el que veurem en l'evolució dels grafons corresponents és que cada píxel saltarà infinitament de 0 a 1. Per tant, sembla raonable pensar que el grafó límit (si existís) hauria de ser la funció constant igual a $1/2$ per a tot $(x,y) \in [0,1]^2$. Per a altres densitats p, sembla, doncs, raonable que el grafó límit hauria de ser constant igual a p per a tot $(x,y) \in [0,1]^2$. Denotarem aquests grafons amb $W_p(x,y)$ i els anomenarem *constants*.

L'important d'aquest segon exemple, però, va més enllà de definir els grafons constants. Observeu que podríem tenir grafs que presentessin una combinació de comportaments i que en algunes regions la seqüència de grafs evolucioni com si fossin $\mathcal{G}(n,p)$ i en altres regions que evolucionin com a $\mathcal{G}(n,p')$. Això fa que els candidats a límits puguin ser funcions en $[0,1]$ molt complicades.

Finalment, el següent exemple ens mostrarà un problema tècnic que cal tenir present. Considerem el graf bipartit complet amb $2n$ vèrtexs, en què els vèrtexs es parteixen en dos subconjunts V_1 i V_2 de la mateixa mida. Considerem ara, per al mateix graf, diferents maneres de posar les etiquetes en els vèrtexs, com són els etiquetaments que es mostren en la figura 14. Aleshores, quan dibuixem els grafons corresponents (vegeu la dreta de la mateixa figura), observem, doncs, un problema, ja que el mateix graf dona lloc a grafons molt diferents: per una banda, el taulell d'escacs (que si fem tendir n a infinit, hauria de tendir al grafó $W_{1/2}$) i, per l'altra, el grafó associat al graf amb dos vèrtexs i una sola aresta.

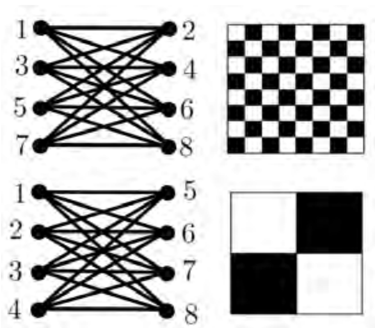

FIGURA 14: Mateix graf i diferents etiquetaments donen lloc a grafons ben diferents.

Aquest exemple ens diu que cal tenir molta cura en com s'usen les etiquetes dels grafs. Resumint el que hem vist fins ara, semblen necessàries, doncs, dues coses ben importants: primer, tenir una manera de tractar com permutem les etiquetes dels vèrtexs en els grafs (i tenir, doncs, un anàleg en el cas continu), i segon, tenir present que els objectes límit poden ser molt generals.

Amb aquestes idees en ment ja podem passar a definir la segona pota important en aquesta teoria: com mesurem distàncies? Per tal de poder establir una noció de convergència adequada, hem de poder quantificar aquest fet. En el cas dels grafs, tenim moltes maneres de fer-ho, però la que emprarem, que està motivada per tota la teoria de la quasialeatorietat, és la següent. Considerem un graf $G = (V, A)$. Direm que és ε-proper al grafó W_p si per a tota parella de subconjunts de vèrtexs $X, Y \in V(G)$ tenim que

$$|d(X,Y) - p| < \varepsilon,$$

on, com hem definit abans, $d(X,Y)$ és la densitat d'arestes entre X i Y. Si en lloc de voler comparar un graf amb un grafó constant el que volem és comparar dos grafs sobre el mateix nombre de vèrtexs, el que fem és estendre aquesta noció: si ara prenem $G_1 = (V, E_1)$ i $G_2 = (V, E_2)$, aleshores direm que G_1 i G_2 són ε-propers respecte a la distància de tall si, per a tot $X, Y \subseteq V$ tenim que

$$|d_{G_1}(X,Y) - d_{G_2}(X,Y)| < \varepsilon.$$

En aquesta definició estem usant el subíndex G_i en el paràmetre de densitat per indicar que aquest càlcul l'estem realitzant en el graf G_i. El terme *distància de tall* ve motivat pel fet que un conjunt d'arestes entre dos conjunts de vèrtexs donat s'anomena *tall*. Si volem generalitzar aquesta noció al cas de grafons, caldrà que usem la integral de Lebesgue en $[0,1]^2$, i en particular el següent operador (que té les propietats d'una norma), anomenat *norma de tall*: per a una funció $W\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ mesurable definim

$$|W|_\square = \sup_{S,T\subseteq[0,1]} \left| \int_{S\times T} W \right|,$$

on el suprem es pren sobre tots els conjunts mesurables S, T de $[0,1]$. No és gaire difícil de verificar que, si G_1 i G_2 són dos grafs amb el mateix conjunt de vèrtexs i amb grafons associats W_{G_1} i W_{G_2}, aleshores és equivalent que G_1 i G_2 siguin ε-propers amb el fet que $|W_{G_1} - W_{G_2}|_\square < \varepsilon$. La importància d'aquesta norma és que pot aplicar-se a qualsevol grafó, no només als procedents del grafs.

Continuem tenint, però, el problema de les permutacions de vèrtexs: potser dos grafs no s'assemblen gens, però, en permutar les etiquetes, resulten molt propers. En concret, donat $G_1 = (V, A_1)$ i $G_2 = (V, A_2)$ sobre el mateix conjunt de n vèrtexs V, i $\sigma \in S_n$ una permutació de mida n, definim G_2^σ el graf que s'obté de permutar les etiquetes dels vèrtexs de G_2 segons σ (parlant clar: mantenim el dibuix del graf, però canviem les etiquetes dels vèrtexs). Aleshores, direm que G_1 i G_2 s'assemblen amb una tolerància ε si per a tot $X, Y \in V$ tenim que

$$\inf_{\sigma\in S_n} |d_{G_1}(X,Y) - d_{G_2^\sigma}(X,Y)| < \varepsilon.$$

Podem traduir aquesta noció de permutació al context continu com segueix. Denotem amb λ la mesura de Lebesgue. Aleshores direm que una funció $\alpha\colon [0,1] \to$

$[0,1]$ *preserva la mesura* de Lebesgue si $\lambda(A) = \lambda(\alpha^{-1}(A))$ per a tot conjunt mesurable A. A més a més, direm que és *invertible* si existeix una altra funció $\beta\colon [0,1] \to [0,1]$ que preserva la mesura i tal que $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ és la funció identitat, llevat de conjunts de mesura nul·la. Denotarem amb $\mathcal{M}_{[0,1]}$ el conjunt de funcions que preserven la mesura i que són invertibles.

Amb aquesta noció de funció que preserva la mesura ja podem usar la idea de la norma de tall i trobar una distància que solucioni el problema dels diferents etiquetaments en grafons. En efecte: si W és un grafó i $\alpha\colon [0,1] \to [0,1]$ una funció que preserva la mesura, aleshores definim W^α com el grafó que puntualment pren valors $W^\alpha(x,y) := W(\alpha(x),\alpha(y))$.

Finalment, si W_1 i W_2 són grafons, definim la seva *distància de tall* com a

$$\delta_\square(W_1,W_2) := \inf_{\alpha\in\mathcal{M}_{[0,1]}} |W_1 - W_2^\alpha|_\square.$$

Amb aquesta definició, de fet, podem tractar els grafons de grafs usant la noció de similitud. Finalment, direm que una seqüència de grafons $\{W_n\}_{n\geq 1}$ convergeix respecte a la distància de tall si la successió $\{W_n\}_{n\geq 1}$ és de Cauchy respecte a $\delta_\square$. En particular, la convergència de grafons (i dels grafs corresponents) la considerarem en relació amb aquesta distància.

Ja ho tenim gairebé tot per a enunciar els grans teoremes que inicien tota la teoria de grafs límits. L'únic problema que tenim és que amb aquesta noció de distància de tall és possible que dos grafons diferents tinguin distància de tall igual a 0 (i, és clar, volem que la distància sigui 0 només quan l'apliquem al mateix grafó dos cops). Per resoldre aquest problema (volem que la distància entre dos grafons sigui 0 si i només si tenim el mateix grafó) fem com és habitual: sobre l'espai de funcions prenem el quocient, tot relacionant dos grafons W_1 i W_2 si $\delta_\square(W_1,W_2) = 0$. L'espai que n'obtenim el denotarem amb $\mathcal{W}_0$ i l'anomenarem *espai dels grafons* (i els seus elements són els grafons *de veritat*). Per tant, fins ara no hem tractat amb el que realment són els grafons, ja que aquests al final sorgeixen d'aplicar un quocient en un espai molt més gran.

Ja tenim ara els conceptes més importants, i ja podem passar a enunciar el gran teorema que inicia la teoria. A [25], Lázsló Lovász i Balázs Szegedy demostren justament que aquest espai funcional és un bon lloc per a fer-hi anàlisi:

Teorema 10 (Lovász-Szegedy, 2006). *$(\mathcal{W}_0,\delta_\square)$ és un espai compacte.*

Per tant, efectivament, l'espai $\mathcal{W}_0$, junt amb la distància de tall, permet sempre trobar parcials convergents en successions de grafons. De fet, en la prova d'aquest teorema, resultat clau en tota la teoria, hi té un paper molt important el lema de regularitat de Szemerédi. Com a producte de les seves tècniques tenim diversos corol·laris. El primer és que els grafs (de fet, els grafons associats a grafs) són densos en $(\mathcal{W}_0,\delta_\square)$. La prova és ben senzilla (si més no la idea): si tenim un grafó qualsevol, el que fem és aproximar-lo per grafons esgraonats. Aquests grafons es poden aproximar aleshores per grafs quasialeatoris, i d'aquesta manera tenim una seqüència de grafs els grafons dels quals s'apropen tant com vulguem al grafó inicial.

Aquests són només els primers ingredients de la teoria de grafons. Cal mencionar que es pot arribar també a la construcció que hem obtingut per una altra via. No en veurem els detalls aquí, però només hem de comentar breument que es pot arribar a les mateixes conclusions usant la noció d'homomorfisme de grafs. En concret, donats dos grafs $G = (V(G), A(G))$ i $H = (V(H), A(H))$, un homomorfisme de H en G és una funció $\phi\colon V(H) \to V(G)$ tal que, si $\overline{uv} \in A(H)$, aleshores $\overline{\phi(u)\phi(v)} \in A(G)$. Dit d'una altra manera, un homomorfisme envia arestes d'un graf a arestes d'un graf hoste. Tot explotant la noció de graf homomorfisme (de gran rellevància també en teoria de grafs), Christina Borgs, Jennifer T. Chayes, Lázló Lovász, Vera T. Sós i Katalin Vesztergombi demostren a [6] que la construcció que hem fet dels grafons pot fer-se de manera equivalent usant una noció de convergència en termes dels homomorfismes de grafs. Es poden trobar més detalls en l'excel·lent article escrit per Oriol Serra i aparegut fa uns anys al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* [31].

6.1 Una mirada al futur

Tots aquests conceptes que hem vist en relació amb la noció de definir límits de grafs són només un petit exemple d'un paradigma molt més ampli que comprèn tota la matemàtica discreta actual. De fet, la frontera entre el que és discret i el que és continu és cada cop menys evident. Definir la noció de convergència d'una seqüència d'estructures discretes i l'objecte límit corresponent (no necessàriament «discret») és una qüestió crítica en les matemàtiques discretes modernes. Aquest problema s'ha estudiat intensament en els darrers anys i sorgeix en diferents escenaris. Sembla evident que tindrà un paper destacat en els propers anys. Per concloure aquest escrit descriurem breument alguns exemples importants de temes matemàtics moderns en què hi ha hagut avenços recents, a més de la teoria de grafs límit que hem vist.

Un segon exemple és l'ús de tècniques analítiques complexes (discretes) per a comprendre els fenòmens de la física estadística. A partir dels treballs pioners sobre la invariància conforme d'Oded Schramm (vegeu una mostra del seu treball a [4, 30]) sobre l'anomenada *evolució de Schramm-Loewner*, hi ha hagut una tendència molt activa i fructífera d'investigació que combina idees sorgides de la teoria de la probabilitat, l'anàlisi complexa i la combinatòria. Aquest treball ha donat lloc en els últims anys a grans avenços en l'estudi, per exemple, dels fenòmens de percolació, fins i tot en dimensions superiors a 2. Un bon exemple de la maduressa d'aquesta línia de recerca és la recent medalla Fields atorgada a Hugo Dominil-Copin, un dels màxims exponents en aquesta àrea de recerca, en què la probabilitat ajuda de manera crucial a entendre les estructures discretes i els seus límits.

Un tercer i bon exemple prové també de la física teòrica: els grafs planars amb una immersió en el pla (també anomenats *mapes planars*) formen una discretització natural per a les superfícies aleatòries que apareixen en el context de gravetat quàntica 2D [9]. En els darrers temps hi ha hagut molt d'interès (i també progressos) en l'estudi dels límits d'escala dels mapes planars aleatoris, la qual cosa ha donat lloc a una molt bona comprensió (des d'un punt de vista topològic i mètric) de l'espai topologic límit que se n'obté, anomenat *mapa brownià* (vegeu-ne la construcció a [26]; més propietats poden trobar-se a [16]). De fet, hi ha resultats molt recents (deguts a Jason Miller, Scott Sheffield i coautors; vegeu, per exemple, la xerrada plenària de Sheffield al Congrés Internacional de Matemàtics de l'any 2022, disponible en xarxa) que connecten aquest món amb el descrit al segon exemple. Aquests fets donen perspectives encara més interessants sobre les teories d'unificació per a l'estudi dels límits d'estructures aleatòries.

Aquests són tres exemples aïllats (però destacats) que mostren que moltes estructures discretes es poden aproximar mitjançant objectes continus utilitzant diferents disciplines de les matemàtiques, que cobreixen especialment la teoria de la probabilitat, l'anàlisi complexa i l'anàlisi funcional. Esperem que aquesta dualitat entre el límit de les estructures discretes (que són objectes continus) i el fet que aquests límits proporcionen informació molt interessant per a les propietats del costat discret tindrà un paper creixent en el futur en l'estudi d'estructures discretes de grans dimensions.

Agraïments

L'autor agraeix a Oriol Serra i Lluís Vena la lectura d'aquest document i el fet d'haver fet suggeriments molt escaients. L'autor agraeix el suport dels projectes de recerca MTM2017-82166-P, PID2020-113082GB-I00, de la xarxa RISE-EU «RandNet» (referència 101007705) i del programa Severo Ochoa i María de Maeztu per a centres i unitats d'excel·lència en R+D (referència CEX2020-001084-M).

Referències

[1] Albert, R.; Barabási, A.-L. «Statistical mechanics of complex networks». *Rev. Modern Phys.*, 74 (1) (2002), 47–97.

[2] Appel, K.; Haken, W. «Every planar map is four colorable. I. Discharging». *Illinois J. Math.*, 21 (3) (1977), 429–490.

[3] Appel, K.; Haken, W.; Koch, J. «Every planar map is four colorable. II. Reducibility». *Illinois J. Math.*, 21 (3) (1977), 491–567.

[4] Benjamini, I.; Schramm, O. «Recurrence of distributional limits of finite planar graphs». *Electron. J. Probab.*, 6 (23) (2001), 13 p.

[5] Bollobás, B.; Thomason, A. «Threshold functions». *Combinatorica*, 7 (1) (1987), 35–38.

[6] Borgs, C.; Chayes, J. T.; Lovász, L.; Sós, V. T.; Vesztergombi, K. «Convergent sequences of dense graphs. I. Subgraph frequencies, metric properties and testing». *Adv. Math.*, 219 (6) (2008), 1801–1851.

[7] Boucheron, S.; Lugosi, G.; Massart, P. *Concentration Inequalities. A Nonasymptotic Theory of Independence*. Amb un pròleg de Michel Ledoux. Oxford: Oxford University Press, 2013.

[8] Chung, F. R. K.; Graham, R. L.; Wilson, R. M. «Quasi-random graphs». *Combinatorica*, 9 (4) (1989), 345–362.

[9] Di Francesco, Ph. «2D Quantum Gravity, matrix models and graph combinatorics». A: Brézin, É.; Kazakov, V.; Serban, D., Wiegmann, P.; Zabrodin, A. (ed.). *Applications of Random Matrices in Physics*. Dordrecht: Springer, 2006, p. 33–88. (NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry; 221)

[10] Erdős, P. «Some remarks on the theory of graphs». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 292–294.

[11] Erdős, P. «Graph theory and probability». *Canadian J. Math.*, 11 (1959), 34–38.

[12] Erdős, P.; Rényi, A. «On random graphs. I». *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), 290–297.

[13] Erdős, P.; Rényi, A. «On the evolution of random graphs». *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5 (1960), 17–61.

[14] Fox, J. «A new proof of the graph removal lemma». *Ann. of Math. (2)*, 174 (1) (2011), 561–579.

[15] Frieze, A.; Karoński, M. *Introduction to Random Graphs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

[16] Le Gall, J.-F. «Brownian geometry». *Jpn. J. Math.*, 14 (2) (2019), 135–174.

[17] Gilbert, E. N. «Random graphs». *Ann. Math. Statist.*, 30 (1959), 1141–1144.

[18] Gowers, W. T. «Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma». *Geom. Funct. Anal.*, 7 (2) (1997), 322–337.

[19] Gromov, M. «Hyperbolic groups». A: *Essays in Group Theory*. Nova York: Springer-Verlag, 1987, p. 75–263. (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; 8)

[20] Gromov, M. «Random walk in random groups». *Geom. Funct. Anal.*, 13 (1) (2003), 73–146.

[21] Komlós, J.; Shokoufandeh, A.; Simonovits, M.; Szemerédi, E. «The regularity lemma and its applications in graph theory». A: *Theoretical Aspects of Computer Science* (Tehran, 2000). Berlín: Springer-Verlag, 2002, p. 84–112. (Lecture Notes in Comput. Sci.; 2292)

[22] Kuratowski, C. «Sur le problème des courbes gauches en Topologie». *Fund. Math.*, 15 (1930), 271–283.

[23] Lovász, L. «Graph minor theory». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 43 (1) (2006), 75–86.

[24] Lovász, L. *Large Networks and Graph Limits*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2012. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; 60)

[25] Lovász, L.; Szegedy, B. «Limits of dense graph sequences». *J. Combin. Theory Ser. B*, 96 (6) (2006), 933–957.

[26] Marckert, J.-F.; Mokkadem, A. «Limit of normalized quadrangulations: the Brownian map». *Ann. Probab.*, 34 (6) (2006), 2144–2202.

[27] Moore, G. E. «Cramming more components onto integrated circuits». *Electronics*, 38 (8), (1965), 114–117.

[28] Roth, K. F. «On certain sets of integers». *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), 104–109.

[29] Ruzsa, I. Z.; Szemerédi, E. «Triple systems with no six points carrying three triangles». A: *Combinatorics* (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976). Vol. II. Amsterdam-Nova York: North-Holland Publishing Co., 1978, p. 939–945. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai; 18)

[30] Schramm, O. «Conformally invariant scaling limits: an overview and a collection of problems». A: *International Congress of Mathematicians*. Vol. I. Zúric: European Mathematical Society (EMS), 2007, p. 513–543.

[31] Serra, O. «Límits de grafs». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 35 (1) (2020), 57–79.

[32] Szemerédi, E. «On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression». *Acta Arith.*, 27 (1975), 199–245.

[33] Szemerédi, E. «Regular partitions of graphs». A: *Problèmes combinatoires et théorie des graphes* (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976). París: Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), 1978, p. 399–401. (Colloq. Internat. CNRS; 260)

[34] Thomason, A. Pseudorandom graphs. A: *Random Graphs '85* (Poznań, 1985). *Ann. Discrete Math.*, 33. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1987, p. 307–331. (North-Holland Math. Stud.; 144)

[35] Watts, D. J.; Strogatz, S. H. «Collective dynamics of 'small-world' networks». *Nature*, 393 (1998), 440–442.

Departament de Matemàtiques i Institut de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya
i Centre de Recerca Matemàtica

juan.jose.rue@upc.edu